Методы оптимизации, ВМК, осень 2018

Домашняя работа 2: Выпуклые множества и функции

Срок сдачи: 18 октября 2018 (четверг), 23:59

1 Пусть K — конус в вещественном векторном пространстве[1]. Покажите, что конус K является выпуклым, если и только если он замкнут относительно суммирования, т. е. $x + y \in K$ для всех $x, y \in K$.

2 Пусть C — выпуклое множество в вещественном нормированном векторном пространстве. Покажите, что замыкание $\overline{C}$ и внутренность $\operatorname{int}(C)$ множества C также являются выпуклыми.

3 Пусть V — вещественное векторное пространство, и пусть $P : V \times \mathbb{R}_{++} \to V$ — *перспективное преобразование* $P(x, t) := x/t$. Покажите, что:

(a) Если множество $Q \subseteq V \times \mathbb{R}_{++}$ выпуклое в пространстве[2] $V \oplus \mathbb{R}$, то его образ $P(Q) := \{P(x, t) : (x, t) \in Q\}$ является выпуклым множеством в пространстве V.

(b) Если C — выпуклое множество в пространстве V, то его прообраз $P^{-1}(C) := \{(x, t) \in V \times \mathbb{R}_{++} : P(x, t) \in C\}$ является выпуклым конусом в пространстве $V \oplus \mathbb{R}$. (*Подсказка:* Покажите, что $P^{-1}(C) = \mathbb{R}_{++}Q$ для некоторого выпуклого множества Q.)

4 Пусть C и D — множества в вещественном векторном пространстве. Покажите, что:

(a) $\operatorname{Conv}(C \cup D) = \operatorname{Conv}(\operatorname{Conv}(C) \cup \operatorname{Conv}(D))$.

(b) $\operatorname{Conv}(C \cap D) \subseteq \operatorname{Conv}(C) \cap \operatorname{Conv}(D)$, причем равенство может не достигаться (приведите пример).

5 Пусть V и W — вещественные векторные пространства, $A : V \to W$ — аффинное преобразование, и пусть S — множество в пространстве V. Покажите, что $\operatorname{Conv}(A(S)) = A(\operatorname{Conv}(S))$, т. е. операции взятия выпуклой оболочки и аффинного преобразования коммутируют. Установите отсюда в частности, что если $c \in \mathbb{R}$, то $\operatorname{Conv}(cS) = c \operatorname{Conv}(S)$, и если $b \in V$, то $\operatorname{Conv}(S + b) = \operatorname{Conv}(S) + b$.

6 Пусть V и W — вещественные векторные пространства, S и T — множества в пространствах V и W соответственно. Покажите, что $\operatorname{Conv}(S \times T) = \operatorname{Conv}(S) \times \operatorname{Conv}(T)$. Используя это и коммутативность операций взятия выпуклой оболочки и аффинного преобразования, установите, что если $V = W$, то $\operatorname{Conv}(S + T) = \operatorname{Conv}(S) + \operatorname{Conv}(T)$.

7 Покажите, что $\operatorname{Conv}\{xx^T : x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| = 1\} = \{A \in \mathbb{S}^n_+ : \operatorname{Tr}(A) = 1\}$.

8 Пусть $n \geq 2$, и пусть $f : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}$ — функция $f(X) := \sigma_{\min}(X)$ (наименьшее сингулярное число). Покажите, что функция f не является ни выпуклой, ни вогнутой.

9 Пусть E — выпуклое множество в вещественном нормированном векторном пространстве, и пусть $f : \overline{E} \to \mathbb{R}$ — функция, определенная на замыкании множества E. Покажите, что если f непрерывная, то из выпуклости сужения $f|_E : E \to \mathbb{R}$ следует выпуклость f.

10 Опираясь на стандартные примеры выпуклых функций и утверждение об операциях, сохраняющих выпуклость, объясните, почему каждая из следующих функций f является выпуклой:

(a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \max\{0, \langle a, x\rangle - b\}$, где $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$.

(b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \sum_{i=1}^n c_i \ln(1 + e^{\langle a_i, x\rangle}) + \frac{\mu}{2}\|x\|^2$, где $\mu, c_1, \ldots, c_n \geq 0$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^n$.

(c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \max_{1 \leq i \leq n} c_i \ln(1 + e^{|x_i|})$, где $c_1, \ldots, c_n \geq 0$.

(d) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \ln(\sum_{i=1}^n e^{\max^2\{0, x_i\}})$.

(e) $f : E \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := -\ln \operatorname{Det}(B - x_1 A_1 - \cdots - x_n A_n)$, где $A_1, \ldots, A_n, B \in \mathbb{S}^n$, $E := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \prec B\}$.

[1] Напомним, что множество K в вещественном векторном пространстве называется *конусом*, если $tx \in K$ для всех $x \in K$ и всех $t > 0$.

[2] Здесь и далее для двух пространств V и W символ $V \oplus W$ обозначает прямое произведение этих пространств, т. е. множество $V \times W$ с естественными операциями суммы, нормы и т. д.

11 Пусть $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ — функция $f(x) := \sum_{i=1}^k x_{[i]}$, где $1 \leq k \leq n$, а символ $x_{[i]}$ обозначает i-ую компоненту отсортированного по убыванию вектора x. Покажите, что функция f выпуклая. (*Подсказка:* Представьте f в виде максимума линейных функций.)

Бонусные задачи

1 Пусть V и W — вещественные векторные пространства. Пусть $A : V \to W$ и $\lambda : V \to \mathbb{R}$ — аффинные преобразования, $E := \{x \in V : \lambda(x) > 0\}$, и пусть $F : E \to W$ — *дробно-аффинное преобразование* $F(x) := A(x)/\lambda(x)$. Покажите, что если $Q \subseteq E$ и S — выпуклые множества в пространствах V и W соответственно, то их образ $F(Q) := \{F(x) : x \in Q\}$ и прообраз $F^{-1}(S) := \{x \in E : F(x) \in S\}$ также являются выпуклыми множествами. (*Подсказка*: Используйте ранее доказанное свойство про перспективное преобразование и тот факт, что образ и прообраз при аффинном преобразовании переводят выпуклое множество в выпуклое.)

2 Пусть C — множество в вещественном нормированном векторном пространстве V, и пусть $x_0 \in C$. Направление $d \in V$ называется *рецессивным направлением множества C в точке x_0*, если $x_0 + td \in C$ для всех $t > 0$. Множество всевозможных рецессивных направлений C в точке x_0 называется *рецессивным конусом множества C в точке x_0* и обозначается $\mathrm{Rec}_{x_0}(C)$. Покажите, что если множество C выпуклое и замкнутое, то рецессивный конус множества C является одинаковым в любой точке, т. е. $\mathrm{Rec}_x(C) = \mathrm{Rec}_{x_0}(C)$ для всех $x \in C$. (Таким образом, можно говорить о *рецессивном конусе* $\mathrm{Rec}(C)$ *множества C* без необходимости указания точки x_0.)

3 Покажите, что множество $\{x \in \mathbb{R}^n : \langle Px, x\rangle \leq \langle c, x\rangle^2;\ \langle c, x\rangle \geq 0\}$, где $P \in \mathbb{S}^n_{++}$, $c \in \mathbb{R}^n$, является выпуклым. (*Подсказка:* Используйте свойство о том, что прообраз выпуклого множества при аффинном преобразовании является выпуклым множеством.)

4 Покажите выпуклость функции

$$f(x) := \cfrac{1}{x_1 - \cfrac{1}{x_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{x_n}}}},$$

определенной на подмножестве $\mathbb{R}^n$, где каждый знаменатель строго положительный. (*Подсказка:* Используйте индукцию и утверждение об операциях, сохраняющих выпуклость.)

5 Пусть E — множество в вещественном векторном пространстве V, и пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Пусть $G := \{(x, t) \in V \times \mathbb{R}_{++} : x/t \in E\}$, и пусть $g : G \to \mathbb{R}$ — *перспективная функция* $g(x, t) := tf(x/t)$. Покажите, что g выпуклая. (*Подсказка:* Рассмотрите надграфик функции g.)

6 Пусть V и W — вещественные векторные пространства, E — непустое множество в пространстве $V \oplus W$, пусть $f : E \to \mathbb{R}$ — ограниченная снизу выпуклая функция. Пусть $G := \{x : (x, y) \in E\}$ — проекция множества E на пространство V, и пусть $g : G \to \mathbb{R}$ — *маргинальная функция* $g(x) := \inf_{y \in W : (x,y) \in E} f(x, y)$. Покажите, что g выпуклая.