

# Алгоритмическая реализация методологии оценивания состава инвестиционных портфелей

Морозов Алексей Олегович<sup>1</sup> ao.morozov@phystech.edu

Моттль Вадим Вячеславович<sup>2</sup> vmottl@yandex.ru

Красоткина Ольга Вячеславовна<sup>3</sup> okrasotkina@markovprocesses.com

Медведев Алексей Владимирович<sup>4</sup> fortunato.mav@gmail.com

<sup>1</sup>Московский физико-технический институт

<sup>2</sup>ФИЦ "Информатика и управление" РАН

<sup>3</sup>Summit, NJ, USA, Markov Processes International

<sup>4</sup>Московский государственный университет

«Интеллектуализация обработки информации»

Гаэта, Италия

9 октября 2018

# Задача оценивания скрытого состава инвестиционного портфеля – Factor Search

Известные доходности портфеля:  $y_t, t = 1, \dots, T$

Доходности очень большого числа биржевых активов:

$$\mathbf{x}_t = (x_{t,i}, i = 1, \dots, n) \in \mathbb{R}^n$$

Модель Шарпа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{t=1}^T \left( y_t - \sum_{i=1}^n \beta_i x_{t,i} \right)^2 \rightarrow \min(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ \underbrace{\sum_{i=1}^n \beta_i = 1}_{\text{долевое распределение капитала}}, \underbrace{\beta_i \geq 0}_{\text{запрет заемного капитала}}, i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

Найти относительно небольшое подмножество активов, из которых фактически состоит портфель:  $\hat{\mathbb{I}} \subset \mathbb{I}, \hat{n} = |\hat{\mathbb{I}}| \ll n = |\mathbb{I}|$

# Регуляризация – использование априорной информации о возможном составе

Основная идея работы — мыслить как инвестор. Какой портфель он предпочел бы?

- 1 Диверсификация вложений капитала, предпочтение малокоррелированных активов:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \beta_i \rightarrow \min$$

- 2 Стремление увеличить доходность портфеля, предпочтение доходных активов:

$$\bar{y} = \sum_{i=1}^n \beta_i \bar{x}_i \rightarrow \max$$

# Теория Марковица о выборе инвестиционного портфеля

Минимум риска при фиксированной доходности:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \beta_i \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \beta_i = \text{const} \end{cases}$$

Максимум доходности при фиксированном риске:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \beta_i \rightarrow \max \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \beta_i = \text{const} \end{cases}$$

Это два взаимно противоречивые требования. Risk Tolerance — индивидуальная характеристика каждого инвестора. Регуляризирующая функция, обеспечивающая баланс Марковица:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \beta_i - \mu \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \beta_i \rightarrow \min$$

## Задача о восстановлении состава портфеля с регуляризацией Марковица

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \beta_i - \alpha \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \beta_i + c \sum_{t=1}^T \left( y_t - \sum_{i=1}^n \beta_i x_{t,i} \right)^2 \longrightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

Очень селективный критерий, что противоречит диверсификации  
Хотим соблюсти регуляризацию Марковица и при этом иметь возможность регулировать размер портфеля

# Специальный алгоритм решения задачи выпуклого программирования

Наша задача о восстановлении состава портфеля:

$$\begin{cases} \gamma \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leq \mu \\ \mu^2 + \beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \beta_i - \alpha \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \beta_i + \\ + c \sum_{t=1}^T \left( y_t - \sum_{i=1}^n \beta_i x_{t,i} \right)^2 \longrightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

В векторной форме:

$$\begin{cases} \gamma \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leq \mu \\ \mu^2 + \beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} + \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{X} \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} - \alpha \bar{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\beta} + \\ + c (\mathbf{y} - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{y} - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}) \longrightarrow \min \\ \mathbf{1}^T \boldsymbol{\beta} = 1, \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Преобразуем критерий:

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{c+1} \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leq \mu \\ \mu^2 + \beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} - \frac{\alpha}{c+1} \bar{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\beta} + \\ + \left( \frac{c}{c+1} \mathbf{y} - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} \right)^T \left( \frac{c}{c+1} \mathbf{y} - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta} \right) \rightarrow \min \\ \mathbf{1}^T \boldsymbol{\beta} = 1, \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Переобозначим коэффициенты и введем дополнительное обозначение:

$$\frac{c}{c+1} \mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}, \quad \frac{\gamma}{c+1} \rightarrow \gamma, \quad \frac{\alpha}{c+1} \rightarrow \alpha, \quad \delta = (\mathbf{y} - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}) \in \mathbb{R}^T$$

Будем решать эквивалентную задачу:

$$\begin{cases} \gamma \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leq \mu \\ \mu^2 + \beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} - \alpha \bar{\mathbf{x}}^T \boldsymbol{\beta} + \delta^T \delta \rightarrow \min(\delta, \beta) \\ \delta = (\mathbf{y} - \mathbf{X}^T \boldsymbol{\beta}), \mathbf{1}^T \boldsymbol{\beta} = 1, \boldsymbol{\beta} \geq \mathbf{0} \end{cases}$$

Далее после введения функции Лагранжа, приходим к двойственной задаче

$$W(\delta) = \gamma \sum_{i: \alpha \bar{x}_i + \mathbf{x}_i^T \delta > 2\mu} \left[ \frac{1}{4} (\alpha \bar{x}_i + \mathbf{x}_i^T \delta)^2 - \mu^2 \right] + \frac{1}{2} (\delta - \mathbf{y})^T (\delta - \mathbf{y}) \rightarrow \min(\delta \in \mathbb{R}^T)$$

# Алгоритм

$$\mathbb{I}_{\delta_k} = \{i : \alpha \bar{x}_i + \mathbf{x}_i^T \delta > 2\mu\}$$

**Data:**  $\mathbf{X}, \mathbf{y}$

**Input:**  $\delta_0$

$W(\delta_0), \mathbb{I}_{\delta_0}$

**while**  $\mathbb{I}_{\delta_{k+1}} \neq \mathbb{I}_{\delta_k}$  **do**

$$\hat{\delta}_{k+1} := \delta_k - [\nabla_{\delta\delta}^2 W(\delta_k)]^{-1} [\nabla_{\delta} W(\delta_k)];$$

$$W(\hat{\delta}_{k+1});$$

**if**  $W(\hat{\delta}_{k+1}) < W(\delta_k)$  **then**

$$\delta_{k+1} := \hat{\delta}_{k+1};$$

**else**

$$f(z) = W(z\delta_k + (1-z)\hat{\delta}_{k+1});$$

$$z^* = \arg \min_{0 \leq z \leq 1} f(z);$$

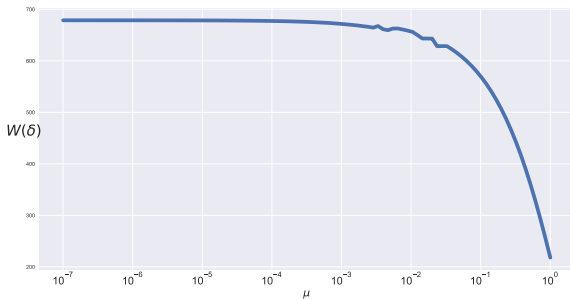
$$\delta_{k+1} := z^*\delta_k + (1-z^*)\hat{\delta}_{k+1};$$

**end**

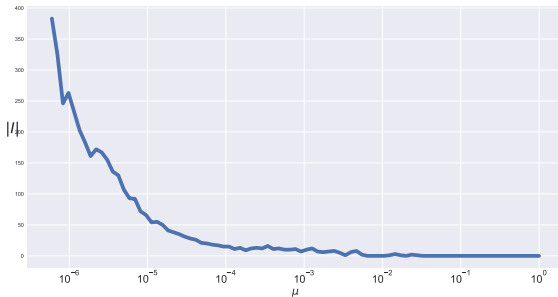
**end**

**Result:**  $\delta, \mathbb{I}_{\delta}$





Оптимальные значения целевой функции с ростом параметра селективности



Уменьшение размера портфеля с увеличением параметра селективности  $\mu$

# Эксперименты 1

$n = 650$  реальных биржевых активов месячной доходности

$T = 250$  временных измерений в месяцах

Модельные портфели, оптимальные по принципу баланса доходность-риск с разными коэффициентами селективности

Selectivity	$\mu_1 = 10^{-6}$	$\mu_2 = 10^{-4}$	$\mu_3 = 10^{-2}$	$\mu_4 = 10^{-1}$	$\mu_5 = 10^0$
$ \mathbb{I} $	$m_1 = 13$	$m_2 = 11$	$m_3 = 10$	$m_4 = 7$	$m_5 = 1$

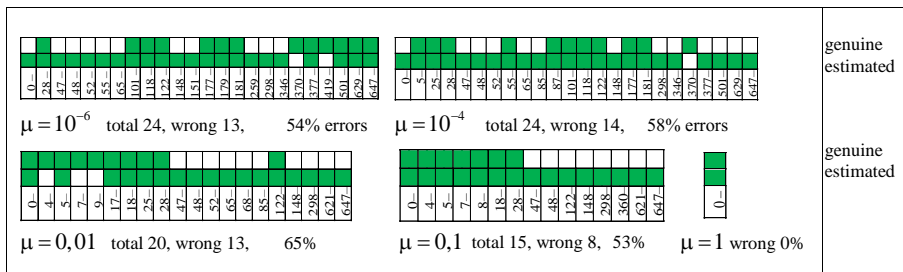
Для каждого набора коэффициентов  $\hat{\beta}_{\mu,i}$ ,  $i \in \hat{\mathbb{I}}_{\mu}$  мы вычислили временной ряд доходности  $y_{\mu} = (y_{\mu,t}, t = 1, \dots, T) \in \mathbb{R}^T$ ,

$y_{\mu,t} = \sum_{i \in \hat{\mathbb{I}}_{\mu}} \hat{\beta}_{\mu,i} x_{t,i} + \xi_t$ , как последовательность случайных величин с

10%-ой дисперсией шума  $\sigma^2(\xi_t) = 0.1 \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( y_t - \sum_{i \in \hat{\mathbb{I}}_{\mu}} \hat{\beta}_{\mu,i} x_{t,i} \right)^2$ .

## Слепой фактор-поиск:

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^T \left( y_t - \sum_{i=1}^n \beta_i x_{t,i} \right)^2 \rightarrow \min(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{cases}$$



**Рис.:** Слепой фактор-поиск. Скрытые (верхняя строка) и наблюдаемые (нижняя) множества активных регрессоров для модельных портфелей с различным параметром селективности. Зеленые квадраты соответствуют активным регрессорам

# Фактор-поиск с дополнительной регуляризацией:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma \sum_{i=1}^n \begin{pmatrix} 2\mu\beta_i, & \beta_i \leq \mu \\ \mu^2 + \beta_i^2, & \beta_i > \mu \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \beta_i - \alpha \sum_{i=1}^n \bar{x}_i \beta_i + \\ + c \sum_{t=1}^T \left( y_t - \sum_{i=1}^n \beta_i x_{t,i} \right)^2 \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{array} \right.$$

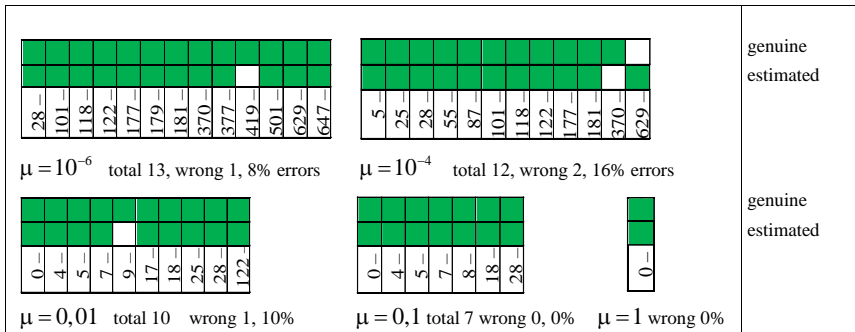


Рис.: Фактор-поиск на основе разумности портфелей

# Поиск подмножества активных регрессоров по принципу Beta Parity

Регуляризация Beta Parity — капитал вложен в выбранные активы в равных долях:  $\beta_i \cong \text{const}, i \in \hat{\mathbb{I}} \subset \mathbb{I}$

Регрессионный критерий Beta Parity:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \beta_i^2 \rightarrow \min(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \beta_i = d \\ \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{cases}$$

$d$  — параметр риска, определяющий селективность

# Более сложное понимание диверсифицированности портфеля — Risk Parity

Дисперсия  $D(\beta)$  доходности портфеля  $\beta$

$$D(\beta) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \beta_i = \sum_{i=1}^n \underbrace{\left( \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \right)}_{\text{доля } i\text{-го актива}} \beta_i$$

$$D(\beta) = \sum_{i=1}^n D_i(\beta), \quad D_i(\beta) = \left( \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \right) \beta_i$$

Risk Parity — равенство долей риска от всех выбранных активов:

$$D_i(\beta) \cong \text{const}, \quad i \in \hat{\mathbb{I}} \subset \mathbb{I}$$

## Предположение формирования инвестиционного портфеля по принципу Risk Parity

$$\left\{ \begin{array}{l} \underbrace{\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \right) \beta_i}_{\text{общий риск}} \rightarrow \min \\ \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{Задача выпуклого программирования} \\ \text{Оптимальный портфель: минимум риска} \\ \text{Очень селективный критерий} \\ \text{Противоречит принципу диверсификации} \end{array}$$

Risk Parity — сочетание требований малого риска и диверсификации:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \left[ nD_i - \sum_{j=1}^n D_j \right]^2 \rightarrow \min(\beta_1, \dots, \beta_n) \text{ Все активы вошли в портфель} \\ D_i = \left( \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \right) \beta_i, \beta_i \geq 0, i = 1, \dots, n, \sum_{i=1}^n \beta_i = 1 \end{array} \right.$$

Идея управления размером портфеля Risk Parity – параметр размера  $d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$ ,  $d_{\max} = \max_i (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_i)$

# Параметрическое семейство портфелей Risk Parity

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n D_i^2 \rightarrow \min(\beta_1, \dots, \beta_n) \\ \sum_{i=1}^n D_i = d, \quad D_i = \left( \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}_i^T \mathbf{x}_j) \beta_j \right) \beta_i \\ \sum_{i=1}^n \beta_i = 1, \quad \beta_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \implies \begin{cases} \mathbb{I} = \underbrace{\{i = 1, \dots, n\}}_{\text{все активы}} \\ \mathbb{I}_d = \underbrace{\{i : \hat{\beta}_i > 0\}}_{\text{портфель с параметром } d} \subseteq \mathbb{I} \end{cases}$$

Меньше  $d$  — меньше риск, больше портфель

Больше  $d$  — больше риск, меньше портфель

Параметр  $d$  — психологическая характеристика инвестора



# Оценивание состава наблюдаемого портфеля по принципу Risk Parity

$y = (y_t, t = 1, \dots, T)$  — наблюдаемый портфель, представленный временным рядом его доходностей

Однопараметрическое семейство моделей Risk Parity:

$$\mathbb{J} = \{\hat{\mathbb{I}}_d : d_{\min} \leq d \leq d_{\max}\}$$

Какая модель  $d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$  из семейства  $\mathbb{J}$  наилучшим образом соответствует временному ряду  $y \in \mathbb{R}^T$ ?

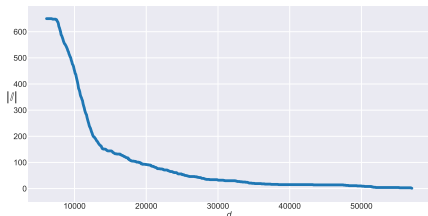
Критерий Leave-One-Out:

$$LOO(d) = \frac{1}{T} \sum_{t \in \mathbb{T}} \left( y_t - \sum_{i=1}^n \beta_{d,i}^{(t)} x_{t,i} \right)^2$$

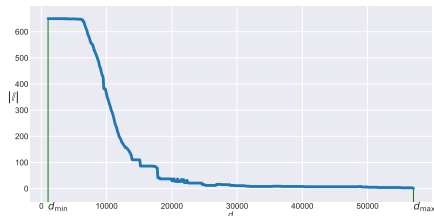
Таблица: Состав портфеля Risk Parity

Размер портфеля	Номера активов
1	7
2	3, 7
3	2, 3, 7
4	1, 2, 3, 7
5	1, 2, 3, 7, 35
6	1, 2, 3, 7, 34, 35
7	1, 2, 3, 7, 12, 13, 35
8	1, 2, 3, 7, 12, 13, 16, 35
8	1, 2, 3, 4, 7, 20, 21, 50
9	1, 2, 3, 4, 7, 20, 21, 31, 50
10	1, 2, 3, 4, 7, 20, 21, 31, 41, 50
11	1, 2, 3, 4, 7, 20, 21, 31, 41, 50, 92
12	1, 2, 3, 4, 7, 20, 21, 31, 41, 50, 62, 92

# Эксперименты



Размер портфеля Beta Parity при увеличении параметра  $d$



Размер портфеля Risk Parity при увеличении параметра  $d$

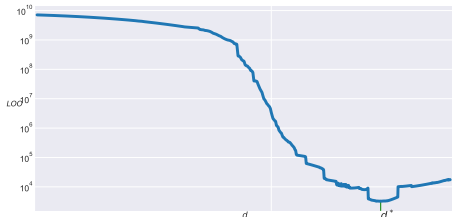


Рис.:  $\text{LOO}(d)$



O. Krasotkina, M. Markov, V. Mottl, D. Babichev, I. Pugach, A. Morozov. Constrained Regularized Regression Model Search in Large Sets of Regressors. *Machine Learning and Data Mining in Pattern Recognition. Lecture Notes in Computer Science*, Springer, 2018  
[doi.org/10.1007/978-3-319-96133-0\\_30](https://doi.org/10.1007/978-3-319-96133-0_30)

Спасибо за внимание!