

# МОМО-16. Домашняя работа 4

Срок сдачи: 21 ноября 2016, 10:30

Напомним определение сопряженной функции. Для произвольной функции  $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ее сопряженной (по Фенхелю) называется функция  $f_* : \text{Dom } f_* \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , определенная по правилу

$$f_*(s) = \sup_{x \in \text{Dom } f} \{s^\top x - f(x)\}.$$

По определению областью определения функции  $f_*$  является множество  $\text{Dom } f_* = \{s \in \mathbb{R}^n : \sup_{x \in \text{Dom } f} \{s^\top x - f(x)\} < +\infty\}$ .

1 Для каждой из следующих функций найти ее сопряженную:

- (a) (Модуль в степени)  $f(x) = \frac{1}{p}|x|^p$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , где  $p \in (1, \infty)$  (*Подсказка:* Запишите ответ через сопряженный параметр  $q$ , задаваемый равенством  $1/p + 1/q = 1$ .)
- (b) (Отрицательная энтропия)  $f(x) = x \ln x + (1-x) \ln(1-x)$ ,  $x \in (0, 1)$ .
- (c) (Постоянная функция)  $f(x) = c$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , где  $c \in \mathbb{R}$ .
- (d) (Линейная функция)  $f(x) = a^\top x + \beta$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , где  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .
- (e) (Квадрат нормы)  $f(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , где  $\|\cdot\|$  — произвольная норма на  $\mathbb{R}^n$ . (*Подсказка:* Используйте двойственную норму.)

2 Докажите следующие свойства сопряженной функции:

- (a) (Сепарабельность) Пусть  $f_i : \text{Dom } f_i \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Рассмотрим функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i),$$

определенную на множестве  $\text{Dom } f = \text{Dom } f_1 \times \dots \times \text{Dom } f_n \subseteq \mathbb{R}^n$ . Тогда

$$f_*(s) = \sum_{i=1}^n f_{i*}(s_i).$$

Областью определения  $f_*$  является  $\text{Dom } f_* = \text{Dom } f_{1*} \times \dots \times \text{Dom } f_{n*}$ .

- (b) (Масштабирование) Пусть  $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\alpha \in (0, +\infty)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим функцию

$$\phi(x) = \alpha f(x) + \beta,$$

определенную на множестве  $\text{Dom } \phi = \text{Dom } f$ . Тогда

$$\phi_*(s) = \alpha f_*((1/\alpha)s) - \beta.$$

Областью определения  $f_*$  является  $\text{Dom } \phi_* = \alpha \text{Dom } f_*$ .

- (c) (Замена переменной) Пусть  $f : \text{Dom } f \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$ . Рассмотрим функцию

$$\phi(x) = f(Ax + b)$$

определенную на множестве  $\text{Dom } \phi = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax + b \in \text{Dom } f\}$ . Если матрица  $A$  является невырожденной, то

$$\phi_*(s) = f_*(A^{-\top} s) - s^\top b.$$

Областью определения  $f_*$  является  $\text{Dom } f_* = \{s \in \mathbb{R}^n : A^{-\top} s \in \text{Dom } \phi_*\}$ .

### 3 Рассмотрим задачу минимизации эмпирического риска

$$(P) \quad \min_{w \in \mathbb{R}^d} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i(a_i^\top w) + \tau R(w) \right\},$$

где  $a_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $R : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\tau > 0$ . На семинаре мы получили общий результат о том, что двойственной задачей к (P) является

$$(D) \quad \max_{\mu \in \mathbb{R}^n} \left\{ -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_{i*}(\mu_i) - \tau R_* \left( -\frac{1}{\tau n} A \mu \right) \right\},$$

где  $A = [a_1, \dots, a_n] \in \mathbb{R}^{d \times n}$  — матрица со столбцами  $a_i$ , а  $f_{i*}$  и  $R_*$  — соответствующие сопряженные функции для  $f_i$  и  $R$ .

Используя этот результат, выпишите двойственную задачу для задачи бинарной логистической регрессии с  $L_2$ -регуляризатором:

$$f_i(z_i) = \ln(1 + \exp(-b_i z_i)), \quad R(w) = \frac{1}{2} \|w\|_2^2,$$

где  $b_i \in \{-1, 1\}$ .

(Указание: Воспользуйтесь полученным на семинаре выражением  $f_*(s) = s \ln s + (1-s) \ln(1-s)$  для сопряженной функции для  $f(x) = \ln(1 + e^{-x})$  и результатом о замене переменной.)

### 4 Для каждого из следующих множеств $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ найти евклидову проекцию заданной точки $v \in \mathbb{R}^n$ на множество $Q$ (т. е. найти $\text{argmin}_{x \in Q} \|x - v\|_2^2$ ):

- (Короб)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \in [l_i, r_i], i = 1, \dots, n\}$ , где  $-\infty \leq l_i \leq r_i \leq +\infty$ . (Замечание: Допускается, что  $l_i = -\infty$  и/или  $r_i = +\infty$ , т. е. короб может быть неограниченным вдоль некоторых направлений.)
- (Единичный  $L_2$ -шар)  $Q = B_2(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$ .
- (Аффинное многообразие)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b\}$ , где  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$ ,  $\text{Rank}(A) = m$ .
- (Полупространство)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x \leq \beta\}$ , где  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .

Воспользуйтесь полученными выше результатами и выпишите ответ для следующих случаев:

- (Неотрицательный ортант)  $Q = \mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = 1, \dots, n\}$ .
- (Единичный  $L_\infty$ -шар)  $Q = B_\infty(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$ .
- (Гиперплоскость)  $Q = \{x \in \mathbb{R}^n : a^\top x = \beta\}$ , где  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ .