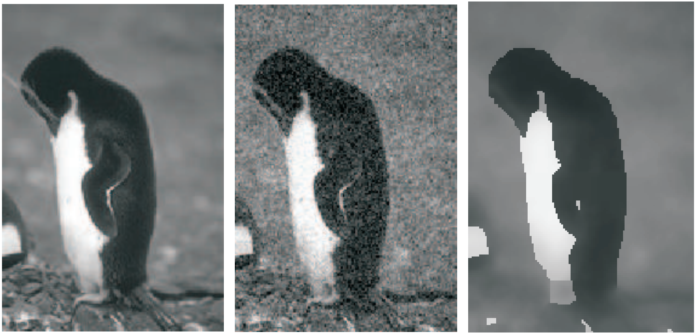
Примеры решения практических задач при помощи графических моделей

«Графические модели»

Данные со структурой

- Изображения
- Видео
- Сигналы, звук
- 3D облака точек
- Тексты
- Задачи о размещениях
- Коды
- Молекулярная биология

Восстановление изображений



$$E(T) = \sum_{i \in \mathcal{V}} E_i(t_i, I_i) + \alpha \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(t_i, t_j), \quad t_i = 0, \ldots, 255$$

t_i – цвета очищенного изображения
(Szeliski et al., 2008)

Сегментация изображений

$$E(T) = \sum_{i \in \mathcal{V}} E_i(t_i) + \alpha \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(t_i, t_j), \quad t_i = 1, \ldots, K$$

t_i – метки классов пикселей
(Shotton et al., 2006)

Стерео

$$E(T) = \sum_{i \in \mathcal{V}} E_i(t_i) + \alpha \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(t_i, t_j), \quad t_i = -D, \dots, 0, \dots, D$$

t_i – сдвиг пикселя до соответствия (диспаритет)

(Szeliski et al., 2008)

Склейка изображений

$$E(T) = \sum_{i \in \mathcal{V}} E_i(t_i) + \alpha \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(t_i, t_j), \quad t_i = 1, \ldots, K$$

t_i – номер изображения, из которого берется пиксель i
(Szeliski et al., 2008)

Панорамы: потенциалы

Унарные потенциалы не 0 только для семян:

$$E_i(t_i) = \begin{cases} +\infty, & i \in Seed_k,\ \ k \neq t_i, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Бинарные потенциалы:

- $E_{ij}(t_i, t_j) = |I_i(t_i) - I_i(t_j)| + |I_j(t_i) - I_j(t_j)|,$
- $E_{ij}(t_i, t_j) = \frac{|I_i(t_i) - I_i(t_j)| + |I_j(t_i) - I_j(x_j)|}{|\nabla_{ij} I(t_i)| + |\nabla_{ij} I(t_j)|}$

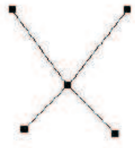
Поиск составных объектов на изображении

$$E(T) = \sum_{i \in \mathcal{V}} E_i(t_i) + \alpha \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(t_i, t_j), \quad t_i = 1, \dots, K$$

t_i – позиция части номер i на изображении
(Felzenszwalb&Huttenlocher, 2005)

Поиск объектов: потенциалы

Модель лица:



Параметры каждой части – позиция.

Унарные потенциалы:

$$E_i(t_i) = -\log \mathcal{N}\left(\beta(t_i)|\mu_i, \Sigma_i\right)$$

$\beta(t_i)$ – линейные фильтры, примененные в точке t_i
Бинарные потенциалы:

$$E_{ij}(t_i, t_j) = -\log \mathcal{N}\left(t_i - t_j|\mu_{ij}, \Sigma_{ij}\right)$$

Видео: сегментация объекта

(Kohli&Torr, 2007)

Видео: оптические потоки

Переменные t_i – смещение пикселя относительно предыдущего кадра.

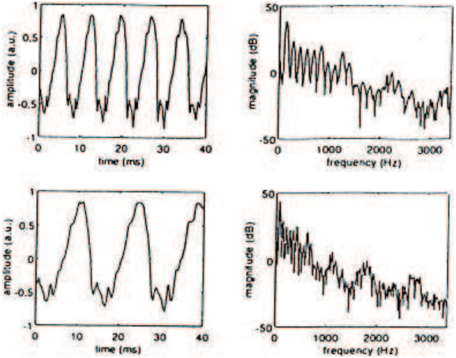
$$E(T) = \sum_{i \in \mathcal{V}} E_i(t_i) + \alpha \sum_{(i,j) \in \mathcal{E}} E_{ij}(t_i, t_j), \quad t_i = 1, \ldots, K,$$

$$E_i(t_i) = d(I_i, I_{i+t_i})$$

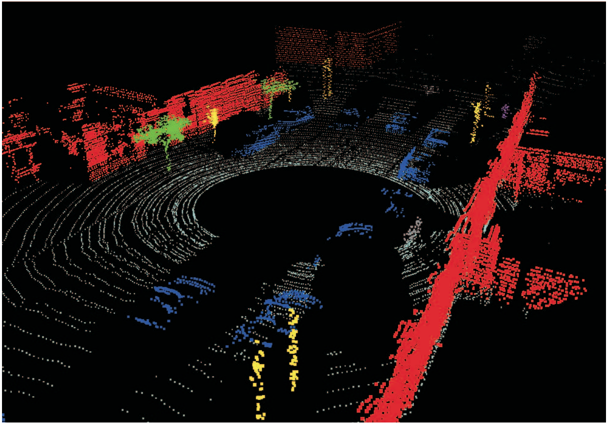
$$E_{ij}(t_i, t_j) = \|t_i - t_j\|^2.$$

Optical flow

Сегментация сигналов: звук



Трехмерные облака точек



(Anguelov et al., 2005)

Раскраска карты

$$E(T) = \sum_i E_i(t_i) + \alpha \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} E_{ij}(t_i, t_j), \quad t_i \text{ — цвет страны}$$

- $E_i(t_i) =$ предпочтения цвета
- $E_{ij}(k, \ell) = M[k = \ell]$

Размещение названий на карте (Lempitsky et al., 2010)

$$E(T) = \sum_i E_i(t_i) + \alpha \sum_{(i,j)\in\mathcal{E}} E_{ij}(t_i, t_j), \quad t_i \text{ — позиция надписи}$$

- $t_i \in \{\varnothing, \leftarrow, \rightarrow, \uparrow, \downarrow, \nearrow, \searrow, \swarrow, \nwarrow\}$
- $E_i(y_i) =$ штраф, если надписи нет
- $E_{ij}(k, \ell) = \infty,$ если i-я надпись в позиции k перекрывает j-ю в позиции ℓ

Тексты: задачи

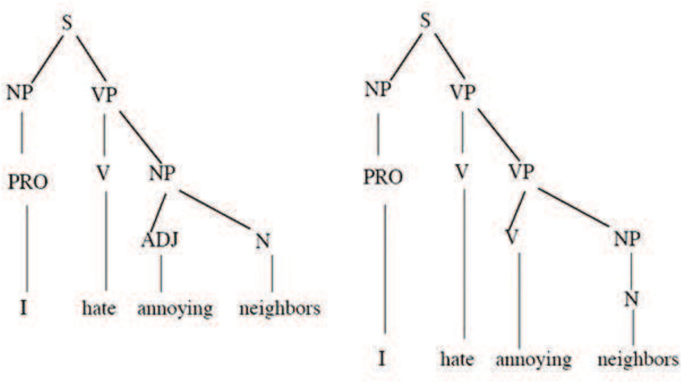
- Сегментация слов на части речи (POS-tagging)
- Распознавание имен собственных (named entity recognition)
- Выравнивание слов для машинного перевода
- Сегментация китайского текста на слова
- Разбор предложений при помощи контекстно-свободной грамматики

Сегментация частей речи: Trigrams'n'Tags (TnT)

- Скрытая марковская модель (HMM) второго порядка
- Наблюдаемые переменные – слова
- Скрытые переменные – метки частей речи
- $P(t_i \mid t_{i-1}, t_{i-2})$ оцениваются по размеченному корпусу текстов
- Сглаживание вероятностей, обработка новых слов, и др.

(Brants, 2000)

Сегментация частей речи: грамматики



Context-free grammars

Блочное кодирование для передачи данных по каналу с помехами

$$z_1 \dots z_k \xrightarrow[\text{кодирование}]{} y_1 \dots y_n \xRightarrow[\text{канал с шумом}]{} \bar{y}_1 \dots \bar{y}_n \xrightarrow[\text{декодирование}]{} \hat{z}_1 \dots \hat{z}_k$$

Скорость передачи – $\frac{k}{n}$.

Пример: код Хэмминга ($k = 4$, $n = 7$)

$$\begin{aligned}
&y_1 = z_1, y_2 = z_2, y_3 = z_3, y_4 = z_4,\\
&y_5 = z_1 + z_2 + z_3,\\
&y_6 = z_2 + z_3 + z_4,\\
&y_7 = z_1 + z_3 + z_4.
\end{aligned}$$

Теория кодирования

Теорема Шеннона (1947): для любого канала существует пропускная способность, такая что

- Для любой скорости передачи сообщений меньше пропускной способности существуют идеальные коды, вероятность ошибки декодирования которых стремится к нулю при стремлении длины блока к бесконечности.
- Для любой скорости передачи сообщений больше пропускной способности идеальных кодов не существует.

Пример идеального кода: каждому $\boldsymbol{z}$ сопоставить случайный $\boldsymbol{y}$ в $1/($пропускная способность$)$ раз длиннее.
Проблема: не известно идеальных кодов с полиномиальным временем декодирования.

Линейные коды

Линейный код задается $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}G$. G – генераторная матрица.
Для кода Хэмминга:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Также код можно задавать проверочной матрицей H: $H\boldsymbol{y}^T = 0$.

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Графическая модель

$$P(\boldsymbol{y} \mid \bar{\boldsymbol{y}}) \sim \underbrace{[\exists \boldsymbol{z} : \boldsymbol{y} = C(\boldsymbol{z})]}_{\text{кодовые слова}} \underbrace{P(\bar{\boldsymbol{y}} \mid \boldsymbol{y})}_{\text{шум в канале}} =$$

$$= \prod_{\ell} \left(1 + \sum_{t : H_{\ell t} = 1} y_t \right) \prod_i P(\bar{y}_i \mid y_i)$$

Получается графическая модель с большим количеством факторов высоких порядков.
Идея (Gallager, 1960, MacKay&Neal, 1996): низкоплотностый код (LDCP-код)

- H – разреженная матрица.
- Подсчитать маргинальные распределения через циклическую передачу сообщений.

David MacKay: Information theory, inference, and learning algorithms