

# Спектральное представление сигналов

к.ф.-м.н., доцент Красоткина О.В.

Московский государственный университет  
факультет ВМК  
кафедра Математических методов прогнозирования

Спектральное представление сигналов  
Лекция 4  
Москва, 2015

# План

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо  
нический  
базис

Примеры

- 1** Историческая справка
- 2** Обобщенный ряд Фурье
- 3** Гармонический базис
- 4** Примеры

# Историческая справка

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

- Периодичность гармонических колебаний исследовал еще в VI веке до нашей эры Пифагор и даже распространил его на описание гармонического движения небесных тел
- Термин spectrum («спектр») впервые применил И. Ньютон в 1571 году при описании разложения солнечного света, пропущенного через стеклянную призму, на многоцветную полосу
- Бернулли и Эйлер показали, что произвольные периодические функции представляют собой суммы простейших гармонических функций – синусов и косинусов кратных частот
- В 1807 году французский инженер Жан Батист Фурье обосновал метод вычисления коэффициентов тригонометрического ряда

# Историческая справка

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

С появлением электротехнических и радиотехнических отраслей науки и техники и развитием радиосвязи гармонический состав сигналов приобрел конкретный физический смысл, а математический аппарат спектрального преобразования функций стал основным инструментом анализа и синтеза сигналов и систем.

# Обобщенный ряд Фурье

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Рассмотрим линейное пространство сигналов  $x(t) \in \mathcal{X}$ . Часто удобно некоторый сигнал  $x(t)$  рассматривать не как функцию, заданную бесконечным числом своих значений в различные моменты времени, а работать со счетным количеством коэффициентов  $\alpha_i$  разложения  $x(t)$  по некоторым базисным сигналам  $\eta_i(t)$ :

$$x(t) = \sum_i \alpha_i \eta_i(t)$$

Такое разложение называется **обобщенным рядом Фурье**, а коэффициенты  $\alpha_i$  — **спектральными коэффициентами**

# Обобщенный ряд Фурье

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

## Заметим

Динамическое представление сигналов - частный случай векторного, соответствующего выбору базисных сигналов в виде дельта-функций или ступенек Хевисайда

# Обобщенный ряд Фурье

Набор сигналов называют ортогональным, если все их попарные скалярные произведения равны нулю, т.е. если  $\langle \eta_i, \eta_k \rangle = 0$  для любых  $i \neq k$ . Набор называют ортонормированным, если  $\langle \eta_i, \eta_k \rangle = \delta_{ik}$ ,

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k. \end{cases}$$

Если базисные сигналы  $\eta_i$  ортогональны, то спектральные коэффициенты находятся по формуле

$$\alpha_i = \frac{\langle x, \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}.$$

Доказательство:

$$\begin{aligned}\langle x, \eta_k \rangle &= \left\langle \sum_i \alpha_i \eta_i, \eta_k \right\rangle = \\ &= \sum_i \alpha_i \langle \eta_i, \eta_k \rangle = \alpha_k \langle \eta_k, \eta_k \rangle.\end{aligned}$$



## Коэффициенты Фурье

$$\alpha_i = \frac{\langle x, \eta_i \rangle}{\langle \eta_i, \eta_i \rangle}.$$

обеспечивают наилучшее приближение исходного сигнала,  
т.е. при таких коэффициентах расстояние

$\|x(t) - \sum_i \alpha_i \eta_i(t)\|$  минимально

TO DO - доказать это

# Обобщенный ряд Фурье

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Энергия ошибки аппроксимации сигнала  
 $\|x(t) - \sum_i \alpha_i \eta_i(t)\|^2 = \|x(t)\|^2 - \sum_i \alpha_i^2 \|\eta_i(t)\|^2 \geq 0$   
откуда следует *неравенство Бесселя*

$$\|x(t)\|^2 \geq \sum_i \alpha_i^2 \|\eta_i(t)\|^2 \quad (1)$$

Если базис является ортонормированным, т.е.  $\langle \eta_i, \eta_j \rangle = 1$ ,  
то

$$\|x(t)\|^2 \geq \sum_i \alpha_i^2 \quad (2)$$

сумма квадратов коэффициентов разложения сигнала по  
любому набору векторов  $\eta_i(t)$  не больше квадрата нормы  
этого сигнала

# Обобщенный ряд Фурье

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

## Равенство Бесселя

Для полной ортонормированной системы базисных функций энергия сигнала складывается из энергий его спектральных компонент

$$\|x(t)\|^2 = \sum_i \alpha_i^2$$

# Обобщенный ряд Фурье

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

## Равенство Парсиваля

Для полной ортонормированной системы базисных функций  $\eta_i(t)$  скалярное произведение двух сигналов равно скалярному произведению их спектров

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \sum_i \alpha_i \beta_i,$$

где  $x(t) = \sum_i \alpha_i \eta_i(t)$  и  $y(t) = \sum_i \beta_i \eta_i(t)$

# Выбор системы базисных функций

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Наиболее часто используемый базис, по которому раскладывают другие сигналы, - это тригонометрический базис или, при использовании формулы Эйлера, система экспонент с мнимым показателем

$$\left\{ \eta_k(t; \omega_1) = A e^{jk\omega_1 t} \right\}_{k=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Почему самым популярным  
является  
тригонометрический базис?

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Почему самым популярным является тригонометрический базис? Экспоненциальные функции являются собственными функциями линейных операций.

# Выбор системы базисных функций

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

- Операция переноса с использованием экспоненциальных функций:  
 $\exp[j\omega(t+h)] = \exp(j\omega h) \exp(j\omega t) = H(\omega) \exp(j\omega t)$ , где  $H(\omega) = \exp(j\omega h)$  собственное значение операции переноса, независимое от переменной.
- Операция дифференцирования:  
 $d[\exp(j\omega t)]/dt = j\omega \exp(j\omega t)$ ,  $H(\omega) = j\omega$ .
- Операция интегрирования:  
 $\exp(j\omega t) dt = (1/j\omega) \exp(j\omega t)$ ,  $H(\omega) = 1/j\omega$ .

В общей форме, для любых линейных операций преобразования:  $T[\exp(j\omega t)] = H(\omega) \exp(j\omega t)$ , где  $T[.]$  - произвольный линейный оператор,  $H(\omega)$  - собственное значение операции, независимое от аргумента.



# Разложение периодического сигнала по гармоническому базису

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Набор функций

$$\left\{ \eta_k(t; \omega_1) = A e^{jk\omega_1 t} \right\}_{k=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

является ортогональным на отрезке  $[t, t + T]$ , где  
 $T = 2\pi/\omega_1$

# Разложение периодического сигнала по гармоническому базису

Действительно,

$$\begin{aligned}\langle \eta_m, \eta_m \rangle &= \int_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} A^2 e^{j\omega(n-m)t} dt = \\ &= \frac{A^2}{j\omega_1(n-m)} e^{j\omega(n-m)t} \Big|_t^{t+\frac{2\pi}{\omega_1}} = \\ &= \frac{A^2}{j\omega_1(n-m)} e^{j\omega(n-m)t} \left( e^{j\omega(n-m)2\pi} - 1 \right) = \\ &= \frac{A^2 e^{j\omega(n-m)t} e^{j(n-m)\pi}}{j\omega_1(n-m)} \left( e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi} \right) = \\ &= \frac{2A^2 e^{j\omega(n-m)t} e^{j(n-m)\pi}}{\omega_1(n-m)} \cdot \frac{e^{j(n-m)\pi} - e^{-j(n-m)\pi}}{2j} = \\ &= \frac{2A^2}{\omega_1(n-m)} e^{j(n-m)(\omega_1 t - \pi)} \sin((n-m)\pi).\end{aligned}$$

# Разложение периодического сигнала по гармоническому базису

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо  
нический  
базис

Примеры

Ортонормированный базис получается, если выбрать

$$A = \sqrt{\omega_1/2\pi} = 1/\sqrt{T},$$

Таким образом, ортонормированный базис будет иметь вид

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{T}} e^{j2\pi kt/T} \right\}_{k=0, \pm 1, \pm 2, \dots}$$

# Разложение периодического сигнала по гармоническому базису

Найдем коэффициенты разложения сигнала по гармоническому базису

$$\alpha_k = \langle x(t), \eta_k(t) \rangle = \frac{1}{\sqrt{T}} \int_T x(t) e^{-j\frac{2\pi kt}{T}} dt,$$

Таким образом, если сигнал  $x(t)$  имеет период  $T$ , то его можно представить в виде бесконечной суммы

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \cdot \exp\left(j\frac{2\pi kt}{T}\right); \\ \alpha_k &= \frac{1}{T} \int_T x(t) \cdot \exp\left(-j\frac{2\pi kt}{T}\right) dt \end{aligned}$$

Данное разложение называется рядом Фурье в комплексной форме, слагаемые данного ряда - гармониками сигнала

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо  
нический  
базис

Примеры

# Разложение периодического сигнала по гармоническому базису

в случае действительного сигнала  $x(t)$  спектральные коэффициенты (амплитуды гармоник) удовлетворяют равенству  $\alpha_{-k} = \alpha_k$ . С использованием формулы Эйлера

$$\frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}} + e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{2} = \cos \frac{2\pi kt}{T};$$
$$\frac{e^{j\frac{2\pi kt}{T}} - e^{-j\frac{2\pi kt}{T}}}{2j} = \sin \frac{2\pi kt}{T},$$

базисный набор комплексных экспонент в случае действительного сигнала эквивалентен набору тригонометрических функций

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \left\{ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi kt}{T}, \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi kt}{T} \right\}_{k=1,2,\dots}$$

# Разложение периодического сигнала по гармоническому базису

Таким образом, действительный  $T$ -периодический сигнал можно представить в виде суммы

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right),$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T x(t) dt; & a_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt; \\ (k = 1, 2, \dots) & & b_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt. \end{aligned}$$

Данное разложение называется *рядом Фурье в тригонометрической форме*

# Разложение периодического сигнала по гармоническому базису

Таким образом, действительный  $T$ -периодический сигнал можно представить в виде суммы

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{2\pi kt}{T} + b_k \sin \frac{2\pi kt}{T} \right),$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{T} \int_T x(t) dt; & a_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos \frac{2\pi kt}{T} dt; \\ (k = 1, 2, \dots) & & b_k &= \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin \frac{2\pi kt}{T} dt. \end{aligned}$$

Данное разложение называется *рядом Фурье в тригонометрической форме*

# Разложение периодического сигнала по гармоническому базису

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Амплитуда нулевой гармоники (величина постоянной составляющей сигнала, т. е. его среднее значение) в обеих формах записи одинакова  $\alpha_0 = a_0$ , а амплитуды остальных гармоник связаны соотношением  $\alpha_k = (a_k - jb_k)/2$ .

Обратное соотношение

$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} = 2 \operatorname{Re} \alpha_k;$$

$$b_k = j(\alpha_k - \alpha_{-k}) = -2 \operatorname{Im} \alpha_k.$$



# Разложение периодического сигнала по гармоническому базису

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Ряд Фурье для действительного сигнала можно переписать в амплитудно-фазовой форме

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(2\pi kt/T + \varphi_k).$$

где  $A_k = 2|\alpha_k| = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$  - амплитудный спектр и  $\varphi_k = -\arctg(b_k/a_k)$  - фазовый спектр.

# Разложение последовательности прямоугольных импульсов

Красоткина  
О.В.

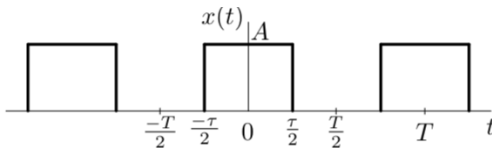
Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Разложить в ряд Фурье последовательность однополярных прямоугольных импульсов амплитудой  $A$ , симметричную относительно начала отсчета времени  $t = 0$ , скважность (отношение периода  $T$  к длительности импульса  $\tau$ ) равна  $q = T/\tau$ .



программный код можно найти в файле  
`square_wave_fourier_series_demo.m`

# Разложение последовательности прямоугольных импульсов

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Постоянная составляющая

$$a_0 = \frac{A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} dt = \frac{A\tau}{T} = A/q;$$

# Разложение последовательности прямоугольных импульсов

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

амплитуды остальных гармоник

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \cos \frac{2\pi kt}{T} dt = \frac{2A}{T} \frac{T}{2\pi k} \sin \frac{2\pi kt}{T} \Big|_{-\tau/2}^{\tau/2} = \\ &= \frac{2A}{\pi k} \sin \frac{\pi k\tau}{T} = \frac{2A}{\pi k} \sin \frac{\pi k}{q}; \end{aligned}$$

$$b_k = \frac{2A}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \sin \frac{2\pi kt}{T} dt = 0.$$

# Разложение последовательности прямоугольных импульсов

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

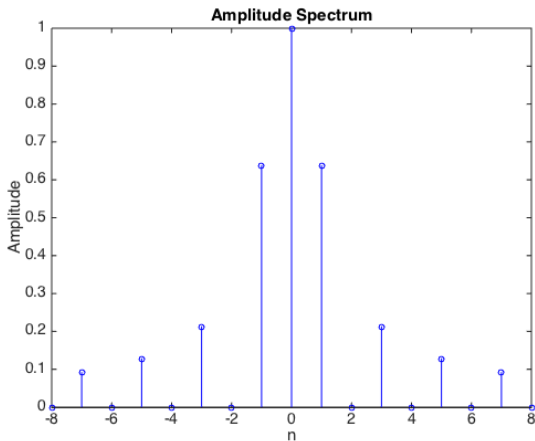
Примеры

Получаем ряд Фурье для рассматриваемого сигнала в тригонометрической форме:

$$x(t) = \frac{A}{q} \left( 1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi k/q)}{\pi k/q} \cos \frac{2\pi kt}{T} \right).$$

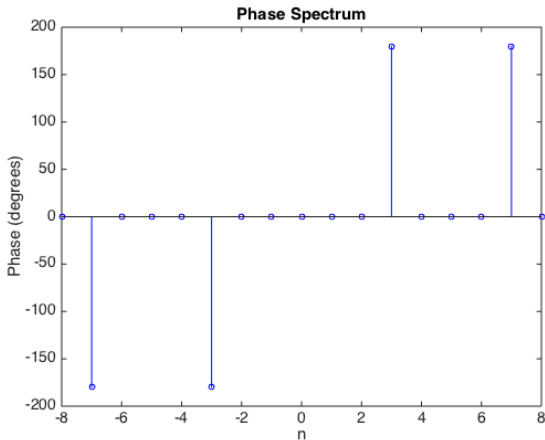
# Разложение последовательности прямоугольных импульсов

## Амплитудный спектр



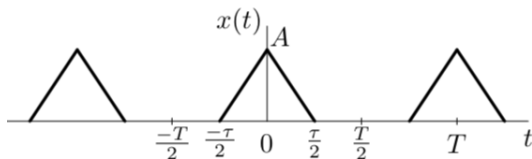
# Разложение последовательности прямоугольных импульсов

## Фазовый спектр



# Разложение последовательности треугольных импульсов

Разложить в ряд Фурье последовательность треугольных импульсов, симметричных относительно начала отсчета времени, амплитудой  $A$ , длительностью  $\tau$ , следующих друг за другом с периодом  $T$



программный код можно найти в файле [triangle\\_wave\\_fourier\\_series\\_demo.m](#)



# Разложение последовательности треугольных импульсов

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

В пределах одного периода, на интервале  $t \in [-T/2, T/2]$

$$x(t) = \begin{cases} A(2t/\tau + 1) & \text{при } -\tau/2 \leq t \leq 0; \\ A(-2t/\tau + 1) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau/2. \end{cases}$$

# Разложение последовательности треугольных импульсов

Раскладывая в ряд Фурье, получим

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j\omega_1 kt} dt = \\ &= \frac{A}{T} \int_{-\tau/2}^0 \left( \frac{2t}{\tau} + 1 \right) e^{-j\omega_1 kt} dt + \\ &\quad + \frac{A}{T} \int_0^{\tau/2} \left( -\frac{2t}{\tau} + 1 \right) e^{-j\omega_1 kt} dt = \\ &= \frac{2A}{T\tau} \left( \int_{-\tau/2}^0 t e^{-j\omega_1 kt} dt - \int_0^{\tau/2} t e^{-j\omega_1 kt} dt \right) + \\ &\quad + \frac{A}{T} \left( \int_{-\tau/2}^0 e^{-j\omega_1 kt} dt - \int_0^{\tau/2} e^{-j\omega_1 kt} dt \right).\end{aligned}$$

# Разложение последовательности треугольных импульсов

Раскладывая в ряд Фурье, получим:

$$\alpha_0 = \frac{A\tau}{2T}; \quad \alpha_k = \frac{AT}{\pi^2 k^2 \tau} \left( 1 - \cos \frac{\pi k \tau}{T} \right), \quad k = 1, 2, \dots$$

тригонометрический базис

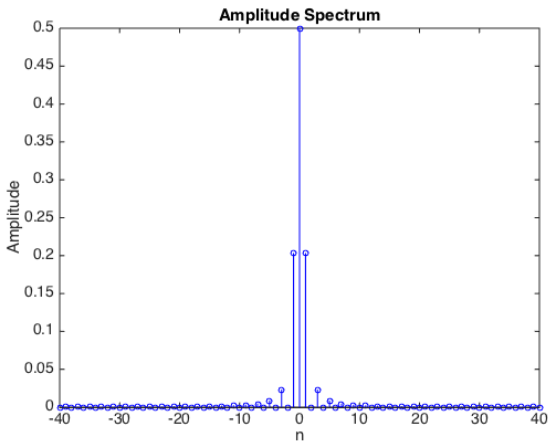
$$a_k = \alpha_k + \alpha_{-k} = 2\alpha_k; \quad b_k = j(\alpha_k - \alpha_{-k}) = 0,$$

амплитудо-фазовая форма

$$A_k = a_k = 2\alpha_k; \quad \varphi_k = 0.$$

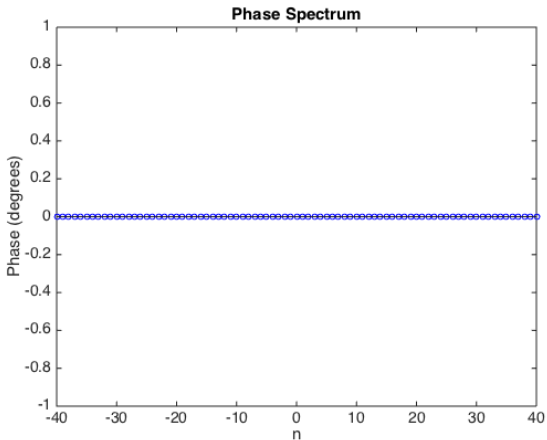
# Разложение последовательности треугольных импульсов

## Амплитудный спектр



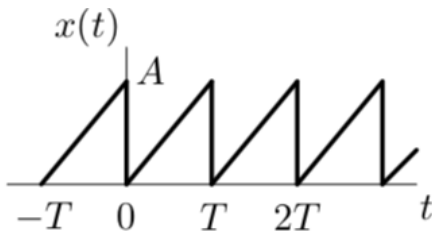
# Разложение последовательности треугольных импульсов

## Фазовый спектр



# Разложение последовательности пилообразных импульсов

Разложить в ряд Фурье последовательность пилообразных импульсов, амплитудой  $A$ , следующих друг за другом с периодом  $T$



программный код можно найти в файле [sawtooth\\_wave\\_fourier\\_series\\_demo.m](#)

# Разложение последовательности пилообразных импульсов

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

Примеры

Раскладывая в ряд Фурье, получим:

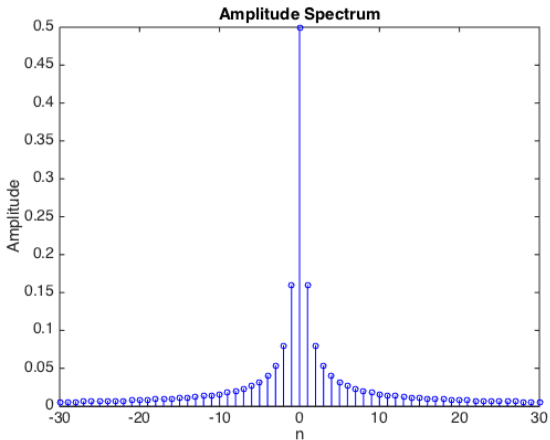
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{At}{T} dt = A/2;$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{At}{T} \cos \frac{2\pi kt}{T} dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{At}{T} \sin \frac{2\pi kt}{T} dt.$$

# Разложение последовательности пилообразных импульсов

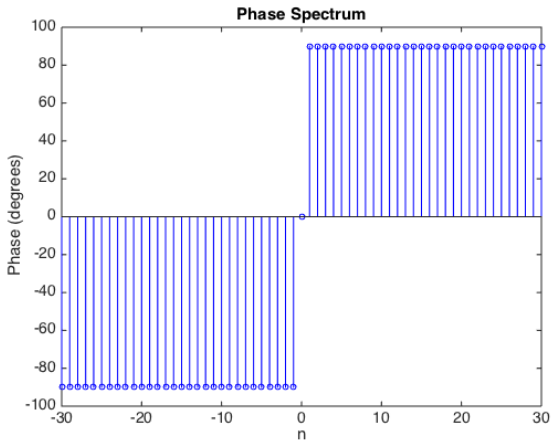
## Амплитудный спектр





# Разложение последовательности пилообразных импульсов

## Фазовый спектр



# Эффект Гиббса

Красоткина  
О.В.

Историческая  
справка

Обобщенный  
ряд Фурье

Гармо-  
нический  
базис

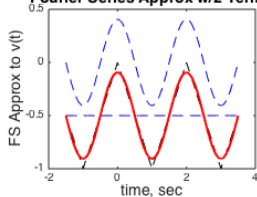
Примеры

Для равномерной сходимости ряда Фурье достаточно, чтобы сигнал  $x(t)$  был непрерывным, а его первая производная по времени - кусочно-непрерывной. Если сигнал имеет разрывы первого рода (в пределах периода число таких разрывов, а так же число экстремумов сигнала должно быть конечно), то ряд Фурье в точках разрыва  $t_i$  сходится к среднему арифметическому  $(x(t_i - 0) + x(t_i + 0))/2$ . При этом по обе стороны от точки разрыва наблюдаются всплески около 9% от величины скачка функции в точке разрыва (явление Гиббса), т.е. сходимость уже не является равномерной.

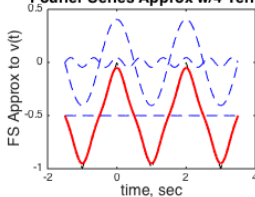
# Иллюстрация равномерной сходимости ряда Фурье на примере спектра треугольных ИМПУЛЬСОВ

Файл fourierseries.m

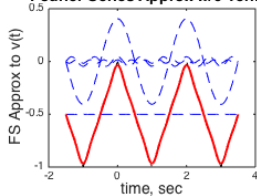
Fourier Series Approx w/2 Terms



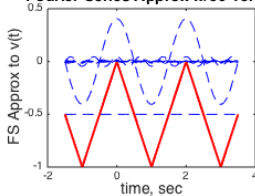
Fourier Series Approx w/4 Terms



Fourier Series Approx w/6 Terms



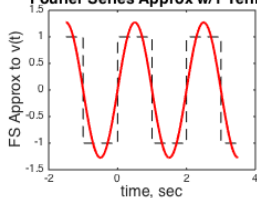
Fourier Series Approx w/50 Terms



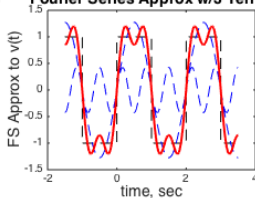
# Эффект Гиббса на примере спектра прямоугольных импульсов

Файл fourierseries.m

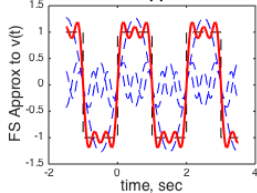
Fourier Series Approx w/1 Terms



Fourier Series Approx w/3 Terms



Fourier Series Approx w/5 Terms



Fourier Series Approx w/101 Terms

