Курс: Графические модели, 2013

Домашнее задание по матричным вычислениям

Дата: 22 марта 2013

1. Вычислить $\frac{\partial}{\partial A}\operatorname{tr}(ABAC)$;
2. Вычислить $\mathbb{E}_{\mathcal{N}(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{\mu},\Sigma)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})^T B(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a})$;
3. Доказать тождество Вудбери $(A+UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$, где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $U \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $V \in \mathbb{R}^{m\times n}$;
4. Пусть

   $$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_a\\ \boldsymbol{x}_b\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\mu}_a\\ \boldsymbol{\mu}_b\end{bmatrix},\ \Sigma = \begin{bmatrix}\Sigma_{aa} & \Sigma_{ab}\\ \Sigma_{ab}^T & \Sigma_{bb}\end{bmatrix},\ \Lambda = \Sigma^{-1} = \begin{bmatrix}\Lambda_{aa} & \Lambda_{ab}\\ \Lambda_{ab}^T & \Lambda_{bb}\end{bmatrix}.$$

   Доказать, что:

   - $p(\boldsymbol{x}_a) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_a|\boldsymbol{\mu}_a, \Sigma_{aa})$;
   - $p(\boldsymbol{x}_a|\boldsymbol{x}_b) = \mathcal{N}(\boldsymbol{x}_a|\boldsymbol{\mu}_a - \Lambda_{aa}^{-1}\Lambda_{ab}(\boldsymbol{x}_b - \boldsymbol{\mu}_b), \Lambda_{aa}^{-1})$.
5. Доказать, что $\frac{\partial}{\partial x}\log\det A(x) = \operatorname{tr}\left(A^{-1}\frac{\partial A}{\partial x}\right)$ для скалярного x.