

Преобразование цветных изображений на основе жирных Б-сплайновых кривых

Л.М. Местецкий, А.Б. Семенов
Тверской государственный университет
Тверь, Россия
l.mest@g23.relcom.ru semenov@tversu.ru

Аннотация

Рассматривается задача представления произвольного цветного растрового образа с помощью жирных Б-сплайновых кривых – однопараметрических семейств кругов переменного радиуса. Демонстрируется возможность сложных преобразований объектов, описанных таким образом (вытягивание, изгиб, изменение ширины отдельных частей или фигуры в целом).

Ключевые слова: жирная линия, жирная Б-сплайновая кривая, восстановление жирной кривой, преобразование изображений.

1. ВВЕДЕНИЕ

В компьютерной графике для описания плоских объектов используют несколько математических моделей. Известен метод описания фигур с помощью задания границы объекта. Граница плоской фигуры представляет собой совокупность контуров – простых замкнутых кривых без самопересечения. Эти контуры могут быть описаны либо в параметрической форме, т.е. уравнением вида $V(t) = (x(t), y(t)), t \in [a, b], V(a) = V(b)$, либо многоугольниками. Известна неявная форма описания плоского объекта, которая состоит в задании так называемой функции принадлежности, которая определена для всех точек плоскости и принимает значение 1 внутри фигуры и 0 вне нее. Существует метод описания фигур с помощью объединения конечного числа площадных примитивов (круг, треугольник, прямоугольник) – полигональное представление. Осуществление каких-либо сложных преобразований (вытягивание и изгиб фрагментов, изменение ширины отдельных частей или фигуры в целом) над объектами, описанными с помощью границы весьма проблематично, а иногда и не реализуемо вообще в силу того, что довольно сложно получить информацию об интегральной структуре из такого представления фигуры. Примитивы, описанные в полигональном виде, не подходят для описания составных объектов с гладкой границей. Известен подход представления плоских фигур с помощью так называемых жирных линий [1] – семейство кругов переменного радиуса с центрами на непрерывных кривых. В качестве математического аппарата для описания жирных линий в [1] использованы сплайны Безье второй степени. Представление плоских объектов с помощью сплайнов Безье весьма компактно и позволяет достаточно просто и эффективно описывать геометрические объекты различной сложности и формы. Данный аппарат в силу своей простоты и универсальности идеально подходит для работы с одноцветными линиями. Однако если рассматривать вопросы преобразования цветных растровых образов, составленных из нескольких жирных кривых Безье, то обеспечение гладкости

составной кривой весьма сложно поддерживать на автоматическом уровне. В данной статье в качестве математического аппарата для представления жирных линий предложено использовать Б-сплайны, у которых в отличие от сплайнов Безье, гладкость составной кривой заложена изначально. Использование жирных Б-сплайновых кривых для описания формы плоских объектов ставит ряд задач: задача восстановления жирной Б-сплайновой кривой по семейству опорных кругов, задача вычисления циркулярных координат для Б-сплайновой жирной линии, задача раскраски жирной Б-сплайновой кривой.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 02-01-00667).

2. ЖИРНЫЕ Б-СПЛАЙНОВЫЕ КРИВЫЕ

Для описания жирных линий известно несколько математических моделей. Например, в [6] жирная линия образуется как след от перемещения отрезка постоянной ширины вдоль непрерывной кривой. Однако при таком описании достаточно трудно решается задача восстановления (подгонки) жирной кривой [7], рассматриваемая в разделе 3. В нашей работе жирная линия рассматривается как след от перемещения круга переменного радиуса вдоль непрерывной кривой.

Жирной линией $F = (u(t), v(t), r(t))$ называется множество точек, образованных объединением

$C = \bigcup_{t \in [a, b]} C_t$ однопараметрического семейства кругов

$$C_t = \{(x, y) \in R^2 : (x - u(t))^2 + (y - v(t))^2 \leq r(t)^2\}$$

на евклидовой плоскости R^2 , где u, v, r – непрерывные дифференцируемые функции, причем $r(t) \geq 0$ [1]. Кривая

$P(t) = (u(t), v(t))$ называется осью жирной линии, а $r(t)$ – ее шириной. Жирную линию можно рассматривать как след от перемещения окружности C_t переменного радиуса вдоль осевой линии $P(t)$. Элементарная кубическая жирная Б-сплайновая кривая, заданная на отрезке $[a, b] = [0, 1]$, определяется следующим векторным уравнением [2]:

$$g(t) = \frac{1}{6} \sum_{i=0}^3 B_i(t) * H_i,$$

где $t \in [0, 1]$ – параметр, $H_i = \{H_{ix}, H_{iy}, H_{ir}\}$ – семейство контрольных кругов с центрами в (H_{ix}, H_{iy}) и

радиусами $H_{ir}, i = 0, \dots, 3$, а $B_i(t)$ - базовые функции кубического Б-сплайна, имеющие следующий вид:

$$B_0(t) = (1-t)^3$$

$$B_1(t) = 3t^3 - 6t^2 + 4$$

$$B_2(t) = -3t^3 + 3t^2 + 3t + 1$$

$$B_3(t) = t^3$$

На рис.1 представлена элементарная жирная Б-сплайновая кривая с семейством контрольных кругов $\{H_0, \dots, H_3\}$.

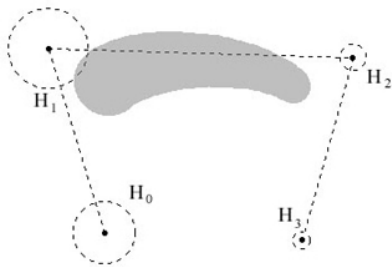


Рис. 1: Жирная Б-сплайновая кривая.

Элементарные кривые могут объединяться в более сложные графические примитивы – составные жирные линии. Кривая γ , которая представляется в виде объединения элементарных кубических Б-сплайновых кривых $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(m-2)}$, называется составной кубической Б-сплайновой кривой с общим семейством контрольных кругов $H = (H_0, \dots, H_m)$. Каждая кривая $\gamma^{(i)}$ описывается параметрическим матричным уравнением следующего вида:

$$\gamma^{(i)}(t) = \frac{1}{6} * P_i * M * T$$

$$P_i = (H_{i-1}, H_i, H_{i+1}, H_{i+2}) = \begin{pmatrix} U_{i-1} & U_i & U_{i+1} & U_{i+2} \\ V_{i-1} & V_i & V_{i+1} & V_{i+2} \\ R_{i-1} & R_i & R_{i+1} & R_{i+2} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & -6 & 3 \\ 1 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \end{pmatrix},$$

где, $t \in [0,1]$, $i = 1, \dots, m-2$. $m+1$ – количество контрольных кругов составной жирной Б-сплайновой кривой.

Кубическая жирная Б-сплайновая кривая может быть представлена в виде кубической жирной кривой Безье [1,5] следующим образом. Пусть H_0, H_1, H_2, H_3 - семейство контрольных кругов Б-сплайновой кривой, D_0, D_1, D_2, D_3 - семейство контрольных кругов кривой Безье. Представление жирной Б-сплайновой кривой в виде

жирной кривой Безье сводится к выражению кругов D_i через H_i . Векторная запись такого преобразования в терминах контрольных кругов имеет следующий вид:

$$\begin{cases} D_0 = \frac{1}{6} H_0 + \frac{4}{6} H_1 + \frac{1}{6} H_2 \\ D_1 = \frac{2}{3} H_1 + \frac{1}{3} H_2 \\ D_2 = \frac{1}{3} H_1 + \frac{2}{3} H_2 \\ D_3 = \frac{1}{6} H_1 + \frac{4}{6} H_2 + \frac{1}{6} H_3 \end{cases}$$

Таким образом, любую жирную Б-сплайновую кривую можно представить в виде жирной кривой Безье. Эта возможность открывает широкие перспективы в использовании Б-сплайнов совместно с кривыми Безье.

3. ВОССТАНОВЛЕНИЕ (ИНТЕРПОЛЯЦИЯ) ЖИРНОЙ Б-СПЛАЙНОВОЙ КРИВОЙ

Задача восстановления (curve fitting) является фундаментальной в компьютерной графике. В [7] задача решается довольно сложно, так как является громоздкой как в части вывода вычислительных соотношений, так и в части вычислительной эффективности. Мы предлагаем решение этой задачи в терминах жирных линий, основанных на перемещении круга [9]. Данный подход существенно упрощает формализацию и само решение задачи.

Рассмотрим задачу представления растрового образа в виде объединения конечного числа жирных линий. Решение данной задачи осуществляется в три этапа.

Первый шаг состоит в вычислении многоугольной фигуры минимального периметра, разделяющей точки объекта и фона на растре. Построенная таким образом многоугольная фигура аппроксимирует форму дискретного образа с точностью равной размеру одного пикселя раstra.

Второй шаг состоит в построении скелетного представления полигональной фигуры [3]. Скелет многоугольной фигуры представляет собой множество серединных осей с шириной, т.е. центров максимальных вписанных в фигуру кругов.

Третий шаг состоит в получении жирных кривых из скелета. Каждая отдельная ветвь скелета должна быть аппроксимирована жирной Б-сплайновой кривой. Таким образом, задача представления растрового образа жирными Б-сплайновыми кривыми сводится к задаче восстановления жирной Б-сплайновой кривой по семейству опорных кругов.

Задача восстановления жирной Б-сплайновой кривой ставится следующим образом. Дана последовательность опорных кругов G_0, \dots, G_{n-1} , каждый из которых описывается в виде $G_j = (G_{jx}, G_{jy}, G_{jr})$, где (G_{jx}, G_{jy}) - координаты центра круга, а G_{jr} - его радиус.

Требуется построить жирную Б-сплайновую кривую $g(t)$, такую чтобы она точно проходила через все круги G_j -

задача интерполяции, либо достаточно близко от кругов G_j - задача аппроксимации. Кривую, проходящую точно через все опорные круги назовем интерполяционной кривой, кривую, проходящую достаточно близко к опорным кругам - аппроксимационной кривой. На рис.2 показана интерполяционная жирная Б-сплайновая кривая, точно проходящая через опорные круги G_0, \dots, G_9 . Таким образом, для восстановления жирной Б-сплайновой кривой

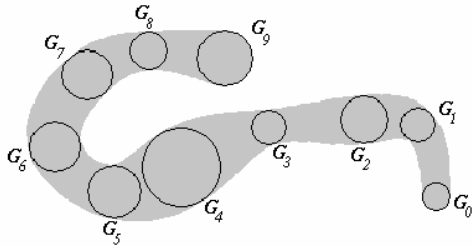


Рис. 2: Интерполяционная жирная Б-сплайновая кривая.

необходимо найти семейство контрольных кругов H_j таких, чтобы получившаяся жирная линия точно проходила через все опорные круги G_j . Будем искать интерполяционный сплайн в виде вектор функции $g(t) = [x(t), y(t), r(t)]$, которая имеет следующую форму:

$$g(t) = \sum_{j=0}^{n+1} H_j * B_{j-1}(t), \quad n - \text{количество опорных кругов,}$$

$H_j = (H_{jx}, H_{jy}, H_{jr})$ - искомые вектора коэффициентов,

$B_j(t)$ - базисный интерполяций сплайн третьей степени [2].

Элементарный кубический Б-сплайн $B_j(t)$, заданный на равномерной монотонной сетке $t_{j-2}, t_{j-1}, t_j, t_{j+1}, t_{j+2}$, представлен на рис.3.

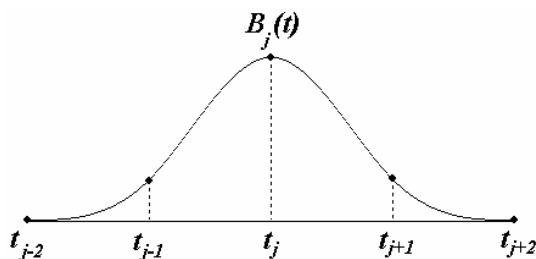


Рис. 3: Элементарный кубический Б-сплайн.

Обозначим

$$\rho(G_i, G_j) = \sqrt{(G_{ix} - G_{jx})^2 + (G_{iy} - G_{jy})^2 + (G_{ir} - G_{jr})^2}$$

- меру близости двух опорных кругов G_i и G_j . Введем параметризацию узлов, которая определяется следующим образом:

$$\begin{cases} t_0 = 0, \\ t_j = \sum_{k=1}^j \rho(G_{k-1}, G_k), \quad j = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

Каждому опорному кругу G_j поставим в соответствие параметр t_j . Тогда система уравнений, описывающая прохождение жирной кривой $g(t)$ через круги G_j , примет следующий вид:

$$G_j = H_j * B_{j-1}(t_j) + H_{j+1} * B_j(t_j) + H_{j+2} * B_{j+1}(t_j), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

В данной системе число уравнений на два меньше числа неизвестных. Дополнить ее можно, например, потребовав, чтобы начальные и конечные контрольные и опорные круги совпадали, т.е. $G_0 = H_0$ и $G_{n-1} = H_{n-1}$. Тем самым получим систему, в которой число неизвестных совпадает с числом уравнений:

$$\begin{cases} G_0 = H_0 \\ G_j = H_j * B_{j-1}(t_j) + H_{j+1} * B_j(t_j) + H_{j+2} * B_{j+1}(t_j) \\ G_{n-1} = H_{n-1} \end{cases} \quad j = 0, \dots, n-1.$$

В силу того, что G_j и H_j это вектора размерности 3, то решение системы сводится к решению трех систем уравнений, отдельно для (H_{jx}, G_{jx}) , (H_{jy}, G_{jy}) и (H_{jr}, G_{jr}) . Как видно, матрица данной системы трехдиагональная, система может быть решена методом прогонки [4]. Найденные коэффициенты

$H_j = \{H_{jx}, H_{jy}, H_{jr}\}, j = 0, \dots, n+1$ представляют собой искомое семейство контрольных кругов жирной Б-сплайновой кривой. В силу того, что число контрольных кругов H_j жестко определяется через количество опорных кругов G_j , которых может быть довольно много, то есть смысл сократить их число. Суть заключается в том, чтобы отобрать из исходного множества часть опорных кругов G_j построить для них интерполяционную жирную кривую такую, чтобы не вошедшие в это подмножество круги лежали достаточно близко от полученной кривой. Задача выбора подмножества кругов среди G_j является NP-полной, поэтому предлагается приближенный алгоритм, состоящий в следующем. Разобьем наше семейство опорных кругов на два

подмножества I_1 и I_2 . Первый назовем списком включенных кругов, а второй списком исключенных. Алгоритм состоит в последовательном конструировании первого множества путем переноса в него части кругов из второго. Алгоритм формирования множества I_1 следующий: Начальный шаг.

Множество I_1 состоит из четырех элементов: первого, последнего и двух опорных кругов, приблизительно равномерно разделяющих все множество на три части. Множество I_2 содержит все остальные круги. На рис.4 показан данный шаг (включенные круги изображены черными, исключенные - белыми).

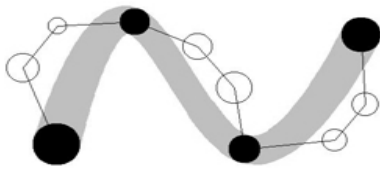


Рис. 4: Начальный шаг аппроксимации.

Основной цикл алгоритма

Для всех кругов из множества I_1 решаем задачу интерполяции. В результате получаем кривую, заведомо проходящую через все круги множества I_1 .

Для каждого круга G_i с параметром t_i из множества I_2 вычисляем $\rho(g(t_i), G_i)$. Выбираем круг G_i , у которого эта величина максимальна, перемещаем его из множества I_2 в I_1 и снова проделываем шаг восстановления жирной линии уже по обновленному множеству I_1 .

Данный цикл повторяется до тех пор, пока не получится $\max \rho(g(t_i), G_i) \leq \varepsilon, \forall G_i \in I_2$, либо пока множество I_2 не станет пустым. ε называют допустимой ошибкой аппроксимации. На рис.5 слева показано семейство из 30 опорных кругов, посередине показана интерполяционная жирная Б-сплайновая кривая и слева приведена кривая после аппроксимации с ошибкой аппроксимации $\varepsilon = 25$. Причем мощность множеств I_1 и I_2 в последнем случае равны 9 и 21 круг соответственно.

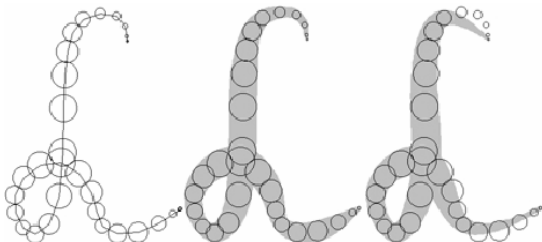


Рис. 5: Пример восстановления кривой.

Предложенный выше метод аппроксимации позволяет избавиться от «лишних» кругов без существенной потери точности, что значительно понижает размерность описания.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЦВЕТНЫХ РАСТРОВЫХ ОБРАЗОВ

Область применения жирных линий может представлять интерес для задач анализа изображения, сжатия информации, создания анимационных эффектов. Мы рассмотрим применение жирных линий для преобразования изображений, так называемого ворпирования изображения [8]. Использование жирных линий дает простые средства при работе с ворпированием. Из предыдущего раздела видно, что представить в виде жирных линий можно практически любой растровый образ с довольно замысловатой формой и структурой. Преобразования над фигурами, описанными таким способом в терминах контрольных кругов, осуществляются путем перемещения центров кругов и изменения их радиуса. На рис.6 продемонстрирована данная возможность.

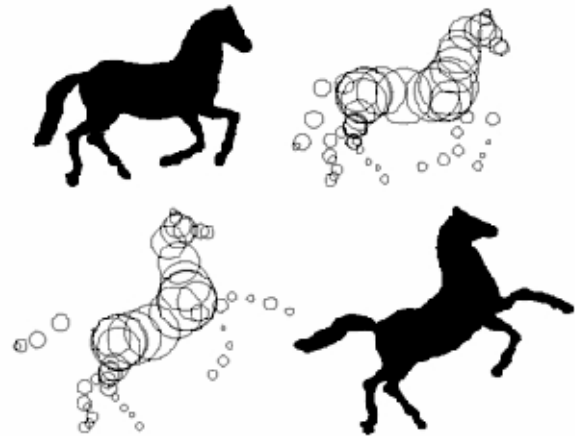


Рис. 6: Преобразование бинарного растрового образа (сверху – исходный образ и его представление в виде жирных линий, внизу – преобразованный образ).

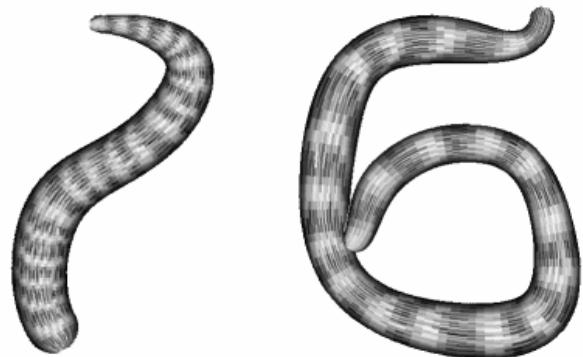


Рис. 7: Эталонная раскраска жирной линии.

Математическая форма описания жирных линий с помощью Б-сплайнов дает возможность преобразовывать не только бинарные изображения. Преобразование цветного образа осуществляется с помощью эталонной раскраски жирной линии, суть которой заключается в том, чтобы произвольную жирную линию раскрасить в соответствии с заданным эталоном, который представляет собой, по сути, жирную кривую с натянутой на нее текстурой. На рис. 7 показаны две жирные Б-сплайновые кривые, одна из которых является эталоном (слева), а вторая (справа) раскрашена в соответствие с этим эталоном.

В [1] раскраска квадратичных кривых Безье осуществлялась с помощью вычисления для каждой внутренней точки координат, характеризующих положение точки относительно жирной кривой (местные координаты). Если рассмотреть семейство жирных линий следующего вида $F(\lambda) = (u(t), v(t), \lambda r(t)), \lambda \geq 0$, то все они будут иметь одну и ту же осевую линию $P(t) = (u(t), v(t))$ и отличаться только шириной $\lambda r(t)$. $F(\lambda)$ называется λ -слоем жирной линии F . Причем, если $\lambda \in [0,1]$, то $F(\lambda)$ лежит «внутри» жирной кривой F , если же $\lambda > 1$, то $F(\lambda)$ будет включать в себя жирную линию F . На рис.8 показана жирная линия F (черным цветом) и несколько λ -слоев (серым цветом) со значениями $\lambda=1.75$, $\lambda=0.7$, $\lambda=0.3$.

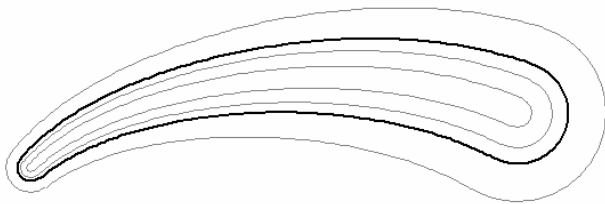


Рис. 8: λ -слои жирной линии.

Любая точка жирной линии является граничной для некоторого λ -слоя жирной линии и для каждой точки границы λ -слоя существует единственный круг в λ -слое, для которого эта точка является граничной: $C_i(\lambda) = \{(x, y) \in R^2 : (x-u(t))^2 + (y-v(t))^2 \leq (\lambda r(t))^2\}$. Циркулярными координатами точки будем называть четверку чисел: $(\lambda, \tau, \theta, \sigma)$, где λ - параметр, задающий ширину слоя жирной линии, τ - параметр, характеризующий относительное положение круга в жирной линии, θ - относительный угол, локализирующий точку в концевых кругах, σ - параметр, определяющий положение точки относительно осевой линии (справа или слева). Вычислим циркулярные координаты точки $G(X, Y)$ в жирной линии третьей степени. Условием принадлежности точки λ -слою жирной кривой является существование некоторого

$t \in [0,1]$ такого, что $(X - u(t))^2 + (Y - v(t))^2 \leq r(t)^2$.

В силу того, что $r(t)$ положительно определенная функция, это эквивалентно выполнению следующего условия:

$$\min_{t \in [0,1]} \frac{(X - u(t))^2 + (Y - v(t))^2}{r(t)^2} \leq \lambda^2.$$

Необходимо найти глобальный минимум функции $L(t) = \frac{(X - u(t))^2 + (Y - v(t))^2}{r(t)^2}$ на отрезке $[0,1]$. Производная этой функции имеет вид:

$$L'(t) = 2 * \frac{(u - X)u'r + (v - Y)v'r - (u - X)^2 r' - (v - Y)^2 r'}{r^3}.$$

Таким образом, точки глобального минимума надо искать среди значений $t=0$, $t=1$ и корней уравнения $(u - X)u'r + (v - Y)v'r - (u - X)^2 r' - (v - Y)^2 r' = 0$. Для жирных кривых данное уравнение представляет собой алгебраическое уравнение 7 степени. Численное решение уравнения можно осуществить методом Штурма, описанным в [1]. Таким образом, среди всех корней уравнения (а их может быть не более семи) и значений $t=0$, $t=1$ необходимо найти такое t , для которого функция $L(t)$ принимает наименьшее значение. В результате будут найдены две циркулярные координаты точки $\lambda = \sqrt{L(t)}$, $\tau = t$.

Остальные две координаты (θ, σ) находятся достаточно простым способом, описанным в [1]. На рис.9 показана жирная линия и для нескольких точек вычислены циркулярные координаты. Так точка А лежит слева от оси и имеет такие циркулярные координаты ($\lambda=0.73$, $t=0.13$), точка В лежит справа от оси и ($\lambda=0.33$, $t=0.27$), точка С лежит слева от оси и ($\lambda=1.42$, $t=0.53$), точка D лежит справа от оси и ($\lambda=0.78$, $t=0.87$).

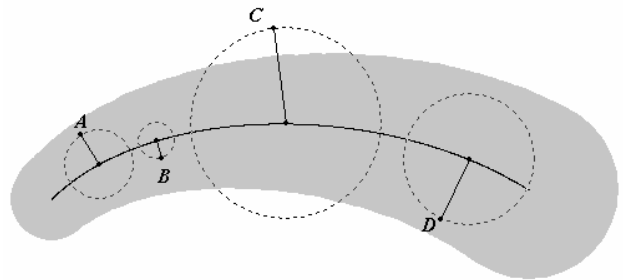


Рис. 9: Циркулярные координаты точек.

Предлагается следующий алгоритм эталонной раскраски жирной линии, основанный на использовании циркулярных координат:

1. Построить прямоугольник минимальной площади такой, чтобы внутри его полностью лежала раскрашиваемая жирная линия (объемлющий прямоугольник).

2. Для каждой сканируемой точки прямоугольника вычисляем циркулярные координаты $(\lambda, \tau, \theta, \sigma)$.
3. Если $\lambda > 1$, то перейти к следующей сканируемой точке иначе в эталонной жирной кривой найти точку, имеющую такие же циркулярные координаты
4. Закрасить сканируемый пиксель в цвет найденной точки.

В силу того, что составная жирная кривая представляет собой последовательность кусков элементарных жирных кривых, то раскраска составной кривой сводится к последовательному перебору элементарных кусков с их раскраской.

Данный алгоритм является достаточно точным, однако требует довольно больших вычислительных затрат. Поэтому в качестве ускорения для решения задачи эталонной раскраски предлагается метод, основанный на триангуляции. Идея метода заключается в триангулировании «внутренности» жирной кривой с последующим отображением получившихся треугольников эталона на треугольники образа. Пусть $F_1(t)$ - эталонная жирная кривая, $F_2(t)$ - некоторая жирная линия (образ), которую необходимо раскрасить в соответствие с эталоном. Приближенный алгоритм эталонной раскраски состоит в следующем.

1. Граница жирной линии $F_2(t)$ аппроксимируется многоугольником (Рис.10а).
2. Для полученного многоугольника строится триангуляция T_2 (Рис.10б).
3. Для каждой вершины триангуляции T_2 вычисляем циркулярные координаты.
4. В эталонной жирной кривой $F_1(t)$ строятся треугольники, вершины которых имеют такие же циркулярные координаты. Тем самым получим новую триангуляцию T_1 , которая рассматривается как прообраз T_2 .
5. Затем каждый треугольник из триангуляции T_1 преобразуется в соответствующий треугольник в триангуляции T_2 .

На рис.11 показаны две триангуляции T_1 и T_2 , а также треугольник E_1 из T_1 и соответствующий ему треугольник E_2 из T_2 .

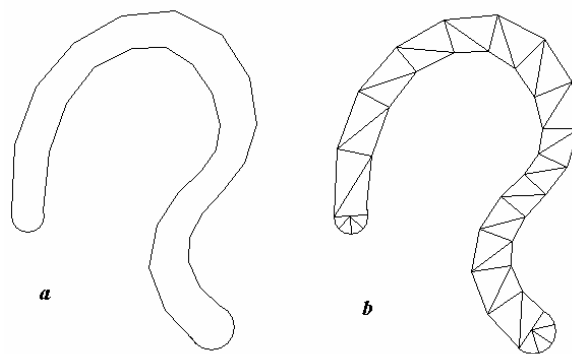


Рис. 10: Аппроксимация границы жирной линии.

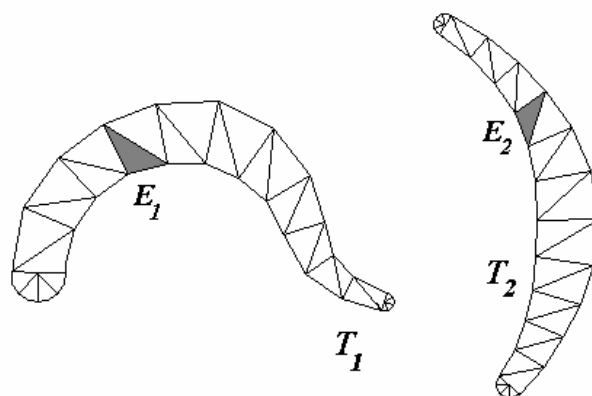


Рис. 11: Преобразуемые жирные кривые (через триангуляцию).

Тем самым, задача эталонной раскраски сводится к задаче преобразования треугольников. Решение данной задачи будем искать через барицентрические координаты. Пусть на плоскости задан треугольник $A_1A_2A_3$, координаты вершин которого имеют следующий вид $A_1 = (x_1, y_1), A_2 = (x_2, y_2), A_3 = (x_3, y_3)$ и произвольная точка $P = (x, y)$. Барицентрические координаты точки P представляют собой тройку чисел

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \text{ таких что } \begin{cases} x = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 \\ y = \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \lambda_3 y_3 \\ 1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases}$$

Таким образом, для нахождения барицентрических координат точки P необходимо разрешить данную систему уравнений относительно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Обозначим через

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_1 = \begin{vmatrix} x & x_2 & x_3 \\ y & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_2 = \begin{vmatrix} x_1 & x & x_3 \\ y_1 & y & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Тогда, используя метод Крамера [4] для систем линейных уравнений, получим $\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $\lambda_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $\lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$.

Чтобы преобразовать треугольник E_1 в E_2 нужно для каждой точки P_{E_2} треугольника E_2 найти барицентрические координаты (решить систему уравнений). Затем в треугольнике E_1 найти точку P_{E_1} имеющую такие же барицентрические координаты что и точка P_{E_2} и закрасить точку P_{E_2} в цвет точки P_{E_1} . Пример преобразования треугольников представлен на рис.12.



Рис. 12: Пример преобразования треугольников.

Таким образом, предложенный алгоритм эталонной раскраски жирной линии посредством триангуляции позволяет значительно ускорить данный процесс.

При использовании сложных композиций, составленных из пересекающихся жирных линий, возникает проблема неоднозначности локализации точек образа в полученных жирных линиях. Это может привести к нарушению гомеоморфности преобразования исходного образа. Для объектов, хорошо аппроксимируемых одной жирной линией, может быть предложен метод ворпирования, основанный на построении «контейнерной» жирной линии. Суть метода заключается в построении такой жирной линии (ограничивающего объема), чтобы она полностью включала в себя преобразуемый объект. Такую жирную линию будем называть контейнером. Теперь преобразования над объектом можно свести к преобразованию контейнера (жирной линии) путем изменения положения контрольных кругов и их радиусов. Данный метод приемлем для объектов, имеющих вытянуто-продолговатую форму (рыбы, змеи), а сами преобразования будут довольно примитивными. Пример преобразования растрового образа через «контейнерную» аппроксимацию представлен на рис. 13.

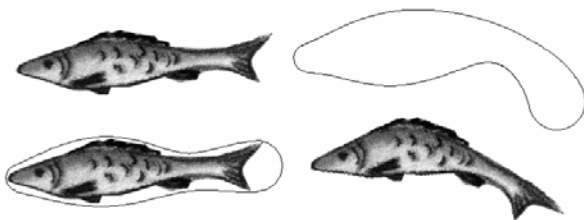


Рис. 13: Преобразование образа через «контейнерную» аппроксимацию.

Пример преобразования более сложного объекта с помощью контейнера представлен на рис.14.

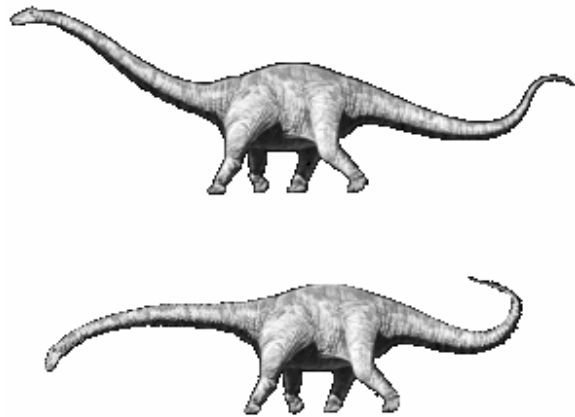


Рис. 14: Преобразование цветного образа.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенный в статье способ описания произвольного цветного растрового образа с помощью жирных Б-сплайновых кривых позволяет существенно расширить класс топологических преобразований над изображениями и дает возможность создавать различные художественные эффекты с помощью этого математического инструментария. Однако, главная проблема, возникающая при работе с жирными линиями, - это неоднозначность преобразования сложной композиции, составленной из нескольких пересекающихся жирных линий. И поэтому сохранение гомеоморфности преобразования исходного образа требует специального рассмотрения и дальнейшего развития предлагаемого в работе подхода.

6. ЛИТЕРАТУРА

- [1] Л.М. Местецкий. *Компьютерная графика на основе жирных линий. Труды международной конференции по компьютерной графике «Графикон-2001»*, Москва, МГУ, 2000.
- [2] Д. Роджерс, Дж. Адамс. *Математические основы машинной графики*. Москва, «Мир», 2001.
- [3] Л.М. Местецкий. *Скелетизация многоугольной фигуры на основе обобщенной триангуляции Делоне. Программирование*, №3, 1999.
- [4] А.И. Кострикин. *Введение в алгебру Учебник для вузов*. 2001.
- [5] L.M. Mestetskii. *Fat curves and representation of planar figures. Computers and Graphics*, Vol. 24(1-2), 2000.
- [6] С. Yao, J. Rokne. *Fat curves. Computer graphics forum*, 10, 1991.
- [7] Q. Lin, J.G. Rokne. *Fitting fat Curves. Mathematical and computer modeling*, Vol. 27, no. 6, 1998.

[8] D. Ruprecht, H. Muller. *Image warping with scattered data interpolation methods*. *Computer Graphics and Applications*. 1995.

[9] А.Б. Семенов, Л.М. Местецкий. *Жирные линии на основе B-сплайнов. Сложные системы: моделирование и оптимизация. Сборник научных трудов. Тверской государственной университет. 2001.*

Авторы

Местецкий Леонид Моисеевич, доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой информационных систем и технологий Тверского государственного университета.

E-mail: l.mest@ru.net

Семенов Андрей Борисович, аспирант кафедры информационных систем и технологий Тверского государственного университета.

E-mail: semenov@tversu.ru

Color bitmap transforms based at B-spline fat curves

Leonid Mestetskii, Andrey Semenov
Tver State university
Tver, Russia

Abstract

The problem of color bitmap representation by B-spline fat curves is considered. The fat curve is a 1-parameter family of circles with various radii. The opportunity of compose image transforms is presented (pulling, blending, width changing of parts and whole image)

Keyword: *Fat Curve, B-Spline Fat Curve, Fitting of Fat Curve, Transform Images*