Комбинаторные оценки обобщающей способности алгоритмов онлайнового обучения

Константин Воронцов (ВЦ РАН),
Илья Решетняк (ВМК МГУ)

Интеллектуализация Обработки Информации, ИОИ-8
18–22 октября 2010, Кипр, г. Пафос

Содержание

Задача онлайнового (динамического) обучения

$\mathbb{X}^T = (x_1, \ldots, x_T)$ — конечная последовательность объектов;
A — множество допустимых предсказаний;

Процесс OLL (On-line Learning)

1: **для всех** $t := 1, \ldots, T$
2: $\quad a_{t+1} := \mu(x_1, \ldots, x_t)$ — предсказание из A;
3: $\quad x_{t+1}$ становится известен;
4: $\quad \mathscr{L}(a_{t+1}, x_{t+1})$ — величина потерь от предсказания;

Задача

Найти кривую обучения $Q(t) = \mathsf{E}\mathscr{L}(a_{t+1}, x_{t+1})$, $t = 1, \ldots, T-1$.
(зависимость математического ожидания потери от времени).

$Q(t)$ характеризует обучаемость *предсказывающего алгоритма* μ.

Вероятностная модель данных

$\mathbb{X}^T = (x_1, \ldots, x_T)$ — неслучайная последовательность объектов.

Аксиома (о стационарности последовательности)

Все $T!$ перестановок $\sigma\mathbb{X}^T$, $\sigma \in S_T$ равновероятны.

Математическое ожидание для произвольной функции $\xi(\mathbb{X}^T)$ (зависящей от порядка объектов) определяется как

$$\mathsf{E}\xi = \frac{1}{T!}\sum_{\sigma\in S_T}\xi(\sigma\mathbb{X}^T).$$

Замечание. Эта аксиома не очень содержательна с точки зрения OLL, но именно в этом случае перенос комбинаторной теории переобучения на задачи OLL наиболее прост.

Частная постановка задачи онлайнового обучения

1. $A = \{a\colon \mathbb{X}^T \to R\}$ — множество *предикторов*, функций $a(x)$.
2. Бинарная функция потерь:
$$\mathscr{L}(a,x) = \bigl[\text{предиктор } a \text{ ошибается на объекте } x\bigr].$$
(тогда $Q(t)$ — это вероятность ошибки в момент t)
3. Алгоритм μ выбирает предиктор с минимальным числом ошибок на предыстории (т.е. это МЭР):
$$a_{t+1} = \mu(X^t) = \arg\min_{a\in A} n(a, X^t).$$

Обозначения:

$n(a,X)$ — *число ошибок* предиктора a на множестве X;
$\nu(a,X) = \frac{1}{|X|} n(a,X)$ — *частота ошибок* a на X;
$\bar{a} = \bigl(\mathscr{L}(a,x_t)\bigr)_{t=1}^T$ — *вектор ошибок* предиктора a.

Связь кривой обучения со скользящим контролем

Благодаря предположению стационарности справедлива лемма:

Лемма

Значение $Q(t)$ совпадает с оценкой полного скользящего контроля (по всем C_T^t разбиениям $X \sqcup \bar{X} = \mathbb{X}^T$ на обучение X и контроль $\bar{X}$) при длине обучающей выборки t:

$$Q(t) = \frac{1}{C_T^t} \sum_{X \sqcup \bar{X}} \nu(\mu(X), \bar{X}).$$

Метод порождающих и разрушающих множеств для задач OLL

Теорема

Пусть при любом t для каждого $a \in A$ можно указать порождающее множество $X_a \subset \mathbb{X}^T$ и запрещающее $X'_a \subset \mathbb{X}^T$ такие, что для всех t-элементных подмножеств $X \subset \mathbb{X}^T$

$$\bigl[\mu(X){=}a\bigr] = \bigl[X_a \subseteq X\bigr]\bigl[X'_a \subseteq \bar{X}\bigr].$$

Тогда кривая обучения:

$$Q(t) = \sum_{a \in A} \frac{P_a}{T-t} \left(\frac{t_a}{T_a} n(a, X'_a) + \frac{T_a - t_a}{T_a} n(a, \mathbb{X}^T) \right),$$

где $P_a = \mathsf{E}\bigl[\mu(X){=}a\bigr] = C_{T_a}^{t_a} / C_T^t$,
$T_a = T - |X_a| - |X'_a|$,
$t_a = t - |X_a|$.

Монотонная цепочка предикторов

Определение

$A = \{a_0, \ldots, a_D\}$ — *монотонная цепочка, если*

1. $n(a_d, \mathbb{X}^T) = m + d$ *для всех* $d = 0, \ldots, D$;
2. $\mathscr{L}(a_{d-1}, x) \leqslant \mathscr{L}(a_d, x)$ *для всех* $d = 1, \ldots, D$ *и всех* $x \in \mathbb{X}^T$.

Пример.

$(D+1) \times T$ матрица ошибок:

```
000000000000000000000000000
100000000000000000000000000
110000000000000000000000000
111000000000000000000000000
111100000000000000000000000
111110000000000000000000000
111111000000000000000000000
111111100000000000000000000
111111110000000000000000000
111111111000000000000000000
111111111100000000000000000
111111111110000000000000000
111111111111100000000000000
```

$\longrightarrow t$

после случайной перестановки σ:

```
000000000000000000000000000
000000000000000100000000000
000000000000000100000001000
000000000000000100100001000
000001000000000100100001000
000001000000100100100001000
000001000010100100100001000
000001000010100110100001000
000001000110100110100001000
000001000110100110100011000
001001000110100110100011000
001001000110100111100011000
001101000110100111100011000
```

$\longrightarrow t$

Точная оценка для монотонной цепочки

Теорема

Если $A = \{a_0, \ldots, a_D\}$ — монотонная цепочка,
μ — пессимистичная минимизация эмпирического риска, то

$$Q(t) = \sum_{d=0}^{\min(D,T-t)} \frac{C_{T-d-1}^{t-1}}{C_T^t (T-t)} R_T^t(d,m),$$

$$R_T^t(d,m) = \begin{cases} d + m\left(\frac{T-d-t}{T-d-1}\right), & d < D; \\ d\left(\frac{T-d}{t}\right) + m\left(\frac{T-d-t}{t}\right), & d = D. \end{cases}$$

для предиктора a_d, $d = 0, \ldots, D$,

x_{d+1} — порождающий,

$x_1, \ldots, x_d$ — запрещающие:

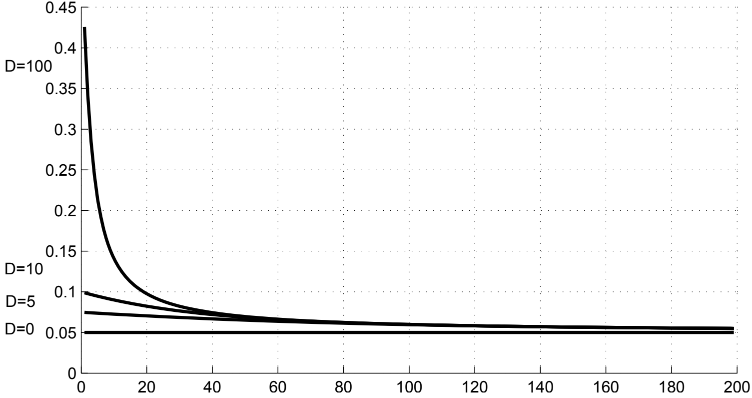
$[\mu(X){=}a_d] = [x_{d+1} \in X]\,[x_1, \ldots, x_d \in \bar{X}]$

0000000000000000000000
1000000000000000000000
1100000000000000000000
1110000000000000000000
1111000000000000000000
1111100000000000000000
1111110000000000000000
1111111000000000000000
1111111100000000000000

$\longrightarrow t$

Кривая обучения $Q(t)$ для монотонной цепочки предикторов

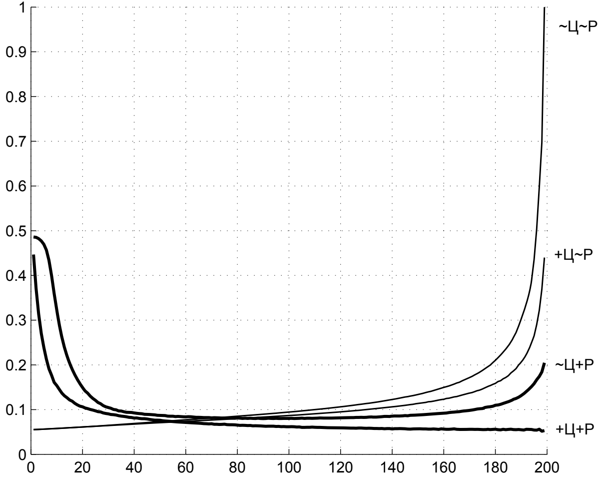
Кривая обучения $Q(t)$ при $T = 200$, $m = 10$, $D = 0, 5, 10, 100$.



Вывод: $Q(t)$ определяется ≈ 5 нижними слоями, начиная с $t \approx 40$.

Кривая обучения $Q(t)$ для четырёх модельных семейств

Кривая обучения $Q(t)$ при $T = 200$, $|A| = 200$, $m = 10$.



не-Цепочка
без Расслоения

Цепочка
без Расслоения

не-Цепочка
с Расслоением

Цепочка
с Расслоением

Выводы и открытые проблемы

- В стационарном случае результаты комбинаторного подхода переносятся на задачи OLL непосредственно.
- Эффекты расслоения и связности **и здесь** уменьшают вероятность переобучения.

Открытые проблемы

- В нестационарном случае надо вводить другую вероятностную модель, ограничивая множества допустимых перестановок (Exchangeability)
  - Плавно изменяющаяся среда
  - Скачкообразно изменяющаяся среда

Вопросы?

Воронцов Константин Вячеславович
vokov@forecsys.ru

Страницы на www.MachineLearning.ru:

- Участник:Vokov
- Слабая вероятностная аксиоматика
- Расслоение и сходство алгоритмов (виртуальный семинар)