Задачи по проекту «Справедливый делёж»

Напоминание: рассматривается пирог $X = [0, 1]$ и n игроков с оценочными функциями v_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Эти функции определены на простанстве конечных кусков $\mathcal{X}$ и обладают свойствами:

Нормализация: $v_i(\varnothing) = 0$, $v_i(X) = 1$;
Положительность: $v_i(A) > 0$ для $A \neq \varnothing$;
Аддитивность: Если $A \cap B = \varnothing$, то $v_i(A \cup B) = v_i(A) + v_i(B)$;
Непрерывность: Для всех A и всех $\alpha \in [0, 1]$ найдётся $B \subset A$, такое что $v_i(B) = \alpha v_i(A)$.

Дележом называется представление $X = A_1 \cup \cdots \cup A_n$, такое что $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. Делёж называется:

- *Пропорциональным*, если $v_i(A_i) \geqslant \frac{1}{n}$;
- *Суперпропорциональным*, если $v_i(A_i) > \frac{1}{n}$;
- *Точным*, если $v_i(A_i) = \frac{1}{n}$;
- *Дележом без зависти*, если $v_i(A_i) \geqslant v_i(A_j)$;
- *Дележом строго без зависти*, если $v_i(A_j) < \frac{1}{n}$, $i \neq j$;
- *Парето-оптимальным*, если нет другого дележа $\{A'_i\}_{i=1,\ldots,n}$, такого что $v_i(A_i) \leqslant v_i(A'_i)$ и хотя бы для одного i неравенство строгое.

Протоколом называется процедура получения дележа посредством последовательных вопросов игрокам про их оценочные функции. Протоколы делятся на 2 большие группы: протоколы в дикретном времени и в непрерывном. В дискретном времени участникам в некоторой заранее определённой последовательности задаются вопросы вида: «Отрежьте от данного куска долю α» или «Сравните два куска». При этом протокол может быть ограниченным, когда итоговый делёж будет заведомо получен после заранее известного числа шагов, и неограниченным, когда итоговый делёж будет получен только в пределе. В непрерывном времени по мере некоторого процесса («движения ножа») участники сами непрерывно меняют какую-то величину, либо могут остановить процесс в некоторый момент. Протокол называется пропорциональным, суперпропорциональным и т.д., если результирующий делёж (в случае, если все участники отвечают честно) обладает этими свойствами. Протокол называется *неманипулируемым*, если рациональный игрок, ничего не знающий про оценки других игроков, но максимизирующий выигрыш в худшем случае, будет отвечать честно.

Непосредственно по виду протокола можно установить, для какого числа игроков он предназначен, а также является ли он дискретным или непрерывным.

Следующий список вопросов требует отдельного анализа и может быть выполнен для каждого протокола:

а) Является ли протокол пропорциональным/суперпропорциональным/точным?
б) Возникает ли по итогам протокола зависть?
в) Является ли протокол Парето-оптимальным? (Как правило, нет)
г) Является ли протокол манипулируемым?
д) Получаются ли в результате протокола связные куски?
е) Какова вычислительная сложность протокола? (Т.е. количество разрезов или запросов к оценочным функциям).
ж) Можно ли переделать протокол для «разрезания на мизер»? (Т.е. участники делят что-то неприятное, в определениях пропорциональности и т.п. все знаки неравенства меняются).
з) Можно ли переделать протокол для неравномерного разрезания? (Условием пропорциональности вместо $v_i(A_i) \geqslant \frac{1}{n}$ имеет вид $v_i(A_i) \geqslant \alpha_i$, где все α_i неотрицательны, а в сумме дают единицу).
и) Если в протоколе возникает зависть, то какова её максимальная мера? (Можно подсчитывать как сумму $\max\{0, v_i(A_j) - v_i(A_i)\}$ по всем i и j или как количество направлений, в которых возможна зависть).

Список изученных протоколов

Поскольку протоколы изучались подробно на лекциях, здесь они описаны очень кратко. Предполагается, что все детали можно восстановить самостоятельно. К каждому из протоколов можно адресовать все вопросы из списка выше. Особенный интерес вызывает последний вопрос про минимизацию зависти.

Непрерывное время

Алгоритм Дубинса–Спаньера. Произвольное число участников. Нож движется слева направо, любой может крикнуть: «Стоп!» — и забрать кусок слева от ножа. Дальше по индукции. Последний оставшийся забирает кусок справа от ножа.

Алгоритм Остина. Пирог делится точно на двоих. Сначала нож движется слева направо, любой может сказать: «Стоп!» — в момент, когда ноже отдеяет ровно половину. После этого он берёт второй нож, ставит его на левый край торта и ведёт оба ножа так, чтобы между ними была ровно половина торта. Второй говорит: «Стоп!», — когда и с его точки зрения между ножами ровно половина.

Алгоритм Стромквиста. Пирог делится без зависти на троих. Меч движется равномерно слева направо. Каждый из участников двигает свой нож, так чтобы он делил кусок справа от меча пополам. В любой момент сказать: «Стоп!», — и забрать кусок слева от меча. Хозяин более левого ножа из оставшихся получает кусок между мечом и центральным ножом (из всех), а хозяин более правого ножа — остаток.

Алгоритм Брамса–Тэйлора–Цвиккера. Пирог делится без зависти на четверых. Применив трижды алгоритм Остина, первые два игрока делят пирог на 4 части, одинаковые с точки зрения каждого из них. Третий их упорядочивает: $S_1 \succ S_2 \succ S_3 \succ S_4$ — и отрезает от S_1 кусок S_1', так чтобы он был эквивалентен S_1 с его точки зрения. После этого игроки выбирают по одному куску из S_1', S_2, S_3, S_4 в порядке 4, 3, 2, 1. При этом если 4 не взял S_1', то 3 обязан его взять.

Далее, обозначим через A того из игроков 3 и 4, кто взял S_1', а через B — другого. Игроки B и 2 делят остаток $R = S_1 \setminus S_1'$ на 4 равные части тройным применением алгоритма Остина. Затем из этих 4 частей игроки выбирают по одной в порядке A, 1, B, 2.

Дискретное время

Одинокий выборщик (алгоритм Финка). Протокол, для которого не нужно заранее знать число участников. Сначала первый игрок делит пирог пополам, второй выбирает любую половину. Затем оба игрока делят свои куски на 3 части, третий выбирает по одной части от каждого куска. И так далее. На n-ом шаге каждый из $n-1$ игрока делит свой кусок на n частей, n-ый выбирает одну часть от каждого куска.

Одинокий делящий. Один из игроков делит пирог на n кусков. Каждый из оставшихся указывает, какие куски для него приемлемы (т.е. имеют ценность не ниже $\frac{1}{n}$). Образуется двудольный граф между игроками и кусками. Если S — какое-то множество *кусков*, то обозначим через $N(S)$ множество всех *игроков*, для которых приемлем хотя бы для один из этих кусков. Найдём такое S, что $|N(S)| = |S| \geqslant 1$, но $|N(T)| > |T|$ для всех $T \subset S$, $T \neq \varnothing$. Тогда внутри S можно распределить куски по теореме Холла о паросочетаниях, а оставшуюся часть пирога — по индукции (оставшиеся игроки ценят любой кусок из S меньше, чем в $1/n$, поэтому остаток им заведомо понравится).

Последний уменьшающий. Первый игрок отрезает от пирога $1/n$. Каждый следующий игрок, не считая последнего, либо уменьшает кусок до $1/n$ со своей точки зрения, либо пропускает ход. Последний либо берёт кусок, либо отказывается, в этом случае кусок получает тот, кто последним его уменьшил. Далее процедура продолжается по индукции.

Отрежь свой кусок сам. Каждый из игроков независимо от других ставит $n-1$ метку, которые делят торт на n равных частей. Поставивший самую левую метку получает кусок от левого края до неё. Затем все его метки стираются. Поставивший самую левую метку из оставшихся получает кусок от нового левого края до неё. И так далее.

Разделяй и властвуй (алгоритм Эвена–Паца). Если игроков чётное число ($2k$), каждый из них ставит метку в медиане. Если нечётное ($2k+1$), то в точке, делящей в пропорции ($k : k+1$). Далее пирог режется в k-ой слева поставленной метке. Те, кто поставил левые k меток, делят левый кусок рекурсивно, остальные k (или $k+1$) — правый кусок.

Алгоритм Селфриджа–Конвея. Пирог делится без зависти на троих. Первый игрок делит пирог на 3 равные части, второй их упорядочивает: $S_1 \succ S_2 \succ S_3$ — и отрезает от S_1 кусок S_1', так чтобы он был эквивалентен S_1 с его точки зрения. После этого игроки выбирают по одному куску из S_1', S_2, S_3 в порядке 3, 2, 1. При этом если 3 не взял S_1', то 2 обязан его взять.

Далее, обозначим через A того из игроков 2 и 3, кто взял S_1', а через B — другого. Игрок B делит остаток $R = S_1 \setminus S_1'$ на 3 равные части. Затем из этих 3 частей игроки выбирают по одной в порядке A, 1, B.

Отдельные задачи

Обобщения алгоритма Остина.

а) Придумайте способ разделить торт на n частей, так чтобы каждая часть с точки зрения каждого из **двух** делящих оценивалась в $1/n$.

б) Придумайте способ разделить торт на n частей между n агентами, так чтобы каждый считал, что ему досталась ровно $1/n$.

Суперпропорциональный делёж. Докажите, что если не все оценочные функции совпадают, то пирог можно разделить суперпропорционально (т.е. так, чтобы каждый получил строго больше $1/n$).