

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные
функции

Альфа-
расширение

Разрезы графов

Д. П. Ветров¹ Д. А. Кропотов² А. А. Осокин¹

¹МГУ, ВМиК, каф. ММП

²ВЦ РАН

Спецкурс «Структурные методы анализа изображений
и сигналов»

План

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- 1 Ликбез
- 2 Марковские сети
- 3 Разрезы графов
- 4 Субмодулярные функции
- 5 Альфа-расширение

Потоки в сетях

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

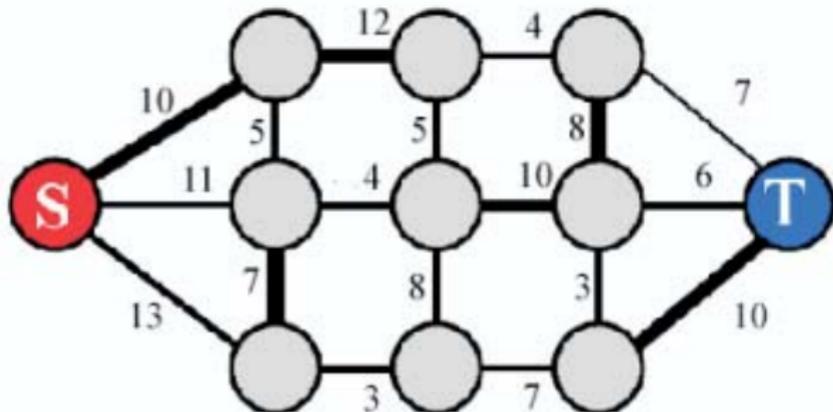
Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- Рассмотрим неориентированный граф с двумя выделенными вершинами (стоком t и истоком s)
- Пусть с каждым ребром $(u, v) \in E$ ассоциировано некоторое неотрицательное число $c(u, v) \geq 0$ — пропускная способность



Потоки в сетях

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- Назовем потоком неотрицательную функцию $f(u, v)$, определенную на ребрах графа, такую что

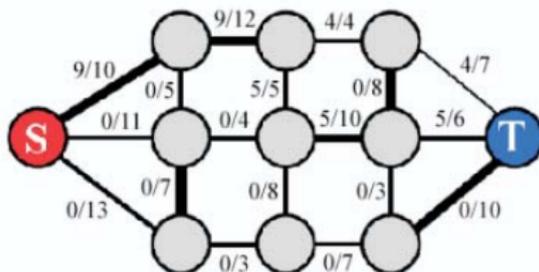
$$f(u, v) \leq c(u, v)$$

$$\sum_{v:(u,v) \in E} f(u, v) - \sum_{v:(v,u) \in E} f(v, u) = 0, \quad \forall u \neq \{s, t\}$$

- Первое условие ограничивает поток через ребро его пропускной способностью, а второе гарантирует отсутствие источников и стоков вне выделенной пары вершин
- Задача поиска максимального потока состоит в максимизации величины

$$M(f) = \sum_{v:(s,v) \in E} f(s, v) \rightarrow \max_f$$

по всем допустимым потокам



Разрезы графов

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

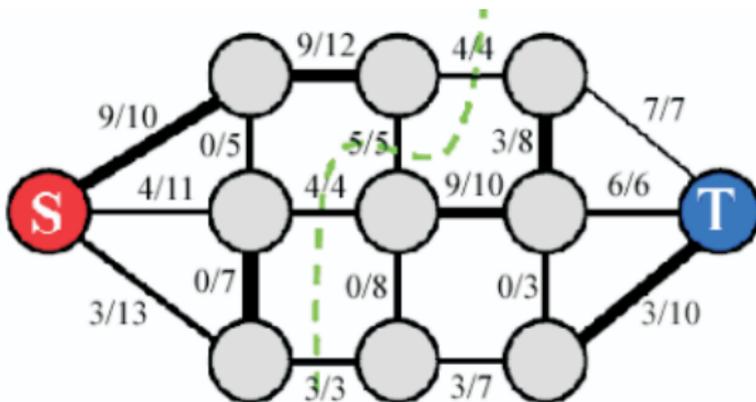
Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- $(s - t)$ -разрезом графа называется разбиение вершин графа на два непересекающихся множества S и T , такие что $s \in S$, $t \in T$
- Величиной разреза называется сумма пропускных способностей всех ребер, один конец которых находится в множестве S , а другой — в множестве T

$$c(S, T) = \sum_{(u,v) \in E, u \in S, v \in T} c(u, v)$$



Теорема Форда-Фалкерсона

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- Известная теорема Форда-Фалкерсона гласит, что максимальный поток в сети равен ее минимальному разрезу
- Существует эффективный (полиномиальной сложности) алгоритм решения задачи поиска минимального разреза в графе
- Задачи поиска максимального потока и минимального разреза являются двойственными



Марковские решетки

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

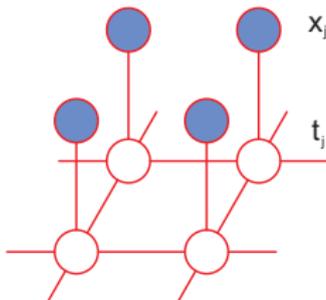
Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- В дальнейшем будем рассматривать т.н. марковские решетки, в которых размер максимальной клики не превосходит двух
- В этом случае совместное распределение переменных марковской сети выражается формулой

$$p(Y) = \frac{1}{Z} \prod_{(y_i, y_j) \in E} \psi_{ij}(y_i, y_j)$$

- Наиболее типичным примером таких сетей являются изображения



Марковские решетки с бинарными переменными

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

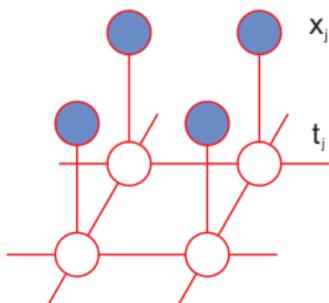
Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- В дальнейшем будем рассматривать марковские решетки такого вида



- Необходимо по наблюдаемым переменным X восстановить наиболее вероятные значения скрытых переменных T

$$T_{MP} = \arg \max_T P(T|X)$$

- Остановимся на важном частном случае, когда скрытые переменные бинарные $t \in \{0, 1\}$

Марковские решетки с бинарными переменными

Разрезы графов

Ветров

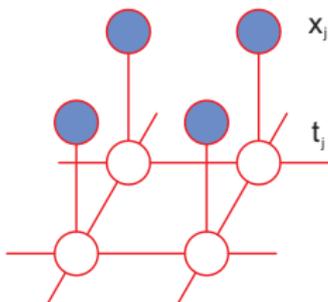
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



- Распределение скрытых переменных марковской сети в этом случае выглядит так

$$p(T|X) = \frac{p(X, T)}{p(X)} = \prod_{(i,j) \in E} \psi_{ij}(t_i, t_j) \prod_i \psi_i(x_i, t_i) \times \text{Const}$$

- В энергетической нотации задача максимизации этого распределения принимает вид минимизации энергии, что более удобно с вычислительной точки зрения

$$E(T|X) = \sum_{(i,j) \in E} E_{ij}(t_i, t_j) + \sum_i E_i(x_i, t_i) =$$
$$- \sum_{(i,j) \in E} \log \psi_{ij}(t_i, t_j) - \sum_i \log \psi_i(x_i, t_i) \rightarrow \min_T$$

Пример задачи сегментации

Разрезы графов

Ветров

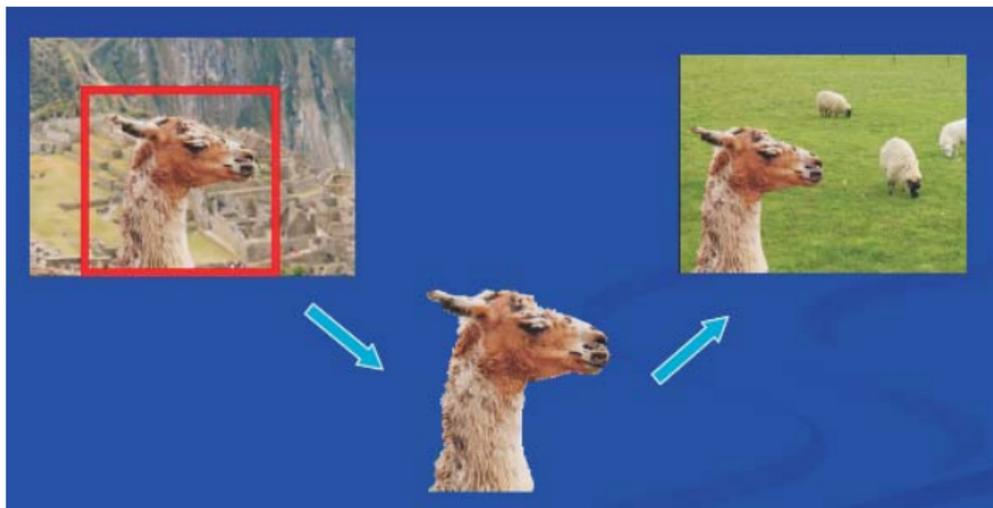
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



Значения скрытых переменных кодируют принадлежность каждого пикселя к объекту либо к фону. Использование графических моделей позволяет учесть, что соседние пиксели чаще всего относятся к одному классу

Репараметризация

Разрезы графов

Ветров

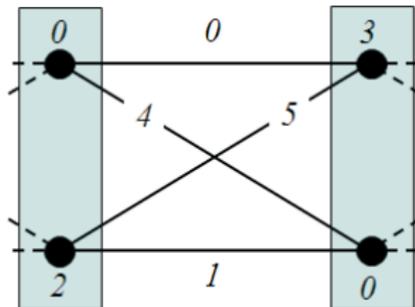
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



- Рассмотрим две соседние вершины t_i и t_j , каждая из которых может принимать два значения
- Тогда функция $E_i(x_i, t_i)$ задается двумя значениями (при известном x_i), а функция $E_{ij}(t_i, t_j)$ — четырьмя
- Для сведения к задаче о поиске минимального разреза нам понадобится выполнить т.н. репараметризацию, сделав «веса» горизонтальных ребер нулевыми

Репараметризация

Разрезы графов

Ветров

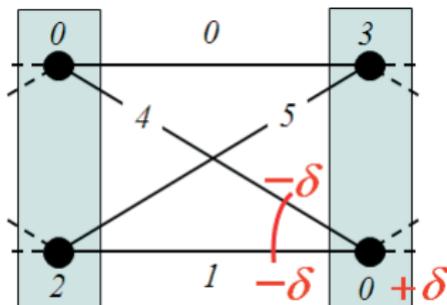
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



- Вычитая одинаковые значения из двух ребер, сходящихся в одну вершину и прибавляя это же значение к весу самой вершины, мы получаем эквивалентный функционал энергии
- Значения такой энергии в каждой точке совпадают со значением исходной энергии
- Применение этой процедуры позволяет путем изменения функции E_i получить эквивалентный энергетический функционал, в котором $E_{ij}(0, 0) = E_{ij}(1, 1) = 0$ и $E_{ij}(0, 1) = E_{ij}(1, 0)$ для всех $(i, j) \in E$

Сведение к разрезу графов

Разрезы графов

Ветров

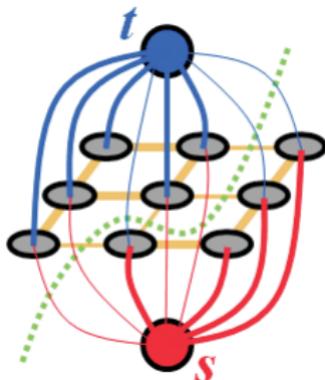
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



- Определим на следующем графе пропускную способность таким образом:
$$c(S, t_i) = E_i(x_i, 0), \quad c(T, t_i) = E_i(x_i, 1), \quad c(t_i, t_j) = E_{ij}(0, 1), \quad \forall (i, j) \in E$$
- Поиск минимального разреза в таком графе отвечает минимизации энергии

$$E(T|X) = \sum_{(i,j) \in E} E_{ij}(t_i, t_j) + \sum_i E_i(x_i, t_i)$$

т.е. поиску наиболее вероятных значений T

Сегментация с семенами

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



- Часто для некоторых пикселей известно заранее, к какому классу они принадлежат
- Например, пользователь может задать фрагменты изображения и фона (семена)

Способы введения унарного слагаемого

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

По смыслу унарное (относительно скрытых переменных) слагаемое $E_i(x_i, t_i)$ задает насколько данный пиксель соответствует тому или иному классу. Оно может отражать следующую информацию:

- Цветовая модель — показывает насколько появление тех или иных цветов более вероятно в данном классе
- Позиционная модель — показывает априорные предположения о положении данного класса на изображении
- Текстурная модель — показывает насколько текстура окрестности пикселя вероятна для данного пикселя

Способы введения парного слагаемого

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

Парное слагаемое $E_{ij}(t_i, t_j)$ отражает степень взаимозависимостей классов соседних пикселей. Наиболее распространенными примерами являются

- Модель Поттса: $E_{ij}(t_i, t_j) = 1 - \delta(t_i, t_j)$ — штраф за несовпадение классов соседних пикселей
- Штраф за несовпадение классов с учетом контраста

$$E_{ij}(t_i, t_j) = \exp\left(-\frac{(x_i - x_j)^2}{2\sigma^2}\right) (1 - \delta(t_i, t_j))$$

Чем сильнее различаются цвета (интенсивности) пикселей x_i , тем меньше штраф за несовпадение классов

- Заметим, что во втором случае парное слагаемое зависит от наблюдаемых переменных x_i и x_j - такая конструкция называется условным случайным полем

Субмодулярность

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- Назовем энергию субмодулярной, если для всех ее парных слагаемых верно

$$E_{ij}(0, 0) + E_{ij}(1, 1) \leq E_{ij}(0, 1) + E_{ij}(1, 0)$$

- Условие субмодулярности является в некотором смысле аналогом выпуклости для функций бинарного переменного
- Унарное слагаемое при этом может быть произвольным
- Легко показать, что с помощью разрезов графов можно оптимизировать именно субмодулярную энергию

Доказательство необходимости

Разрезы графов

Ветров

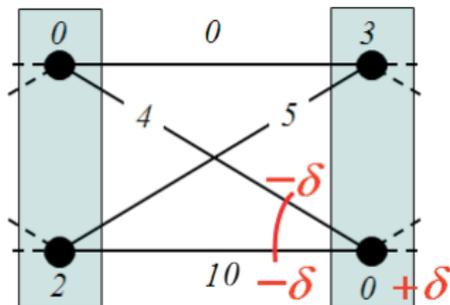
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



- Пусть имеется парное слагаемое, не являющееся субмодулярной функцией

$$E_{ij}(0, 0) + E_{ij}(1, 1) > E_{ij}(0, 1) + E_{ij}(1, 0)$$

- Тогда и только тогда в результате репараметризации нулевые веса горизонтальных связей приведут к возникновению отрицательных диагональных связей

Доказательство необходимости

Разрезы графов

Ветров

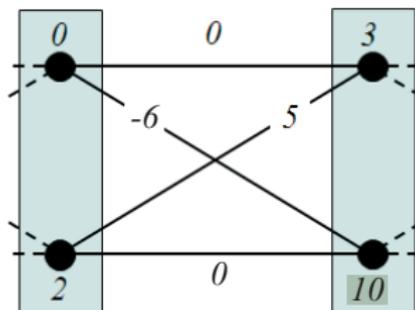
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



- Но это означает, что пропускная способность некоторых ребер в графе, разрез которого мы будем минимизировать, станет отрицательной!
- В этой ситуации классические полиномиальные алгоритмы поиска минимального разреза в графе неприменимы
- Задача оптимизации энергии стала NP-трудной
- Существуют некоторые обобщения полиномиального алгоритма на случаи, когда энергия может быть сведена в субмодулярной путем замены части переменных на свои отрицания: $t_i \rightarrow (1 - t_i)$

Случай небинарных переменных

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- До сих пор рассматривался случай, когда скрытые переменные бинарные
- Теперь рассмотрим ситуацию, когда скрытые переменные t_i могут принимать одно из K значений
- Физически это соответствует делению изображения на K областей
- Такие задачи возникают при построении карт диспаратетов, коллажах, семантической сегментации и пр.

Семантическая сегментация

Разрезы графов

Ветров

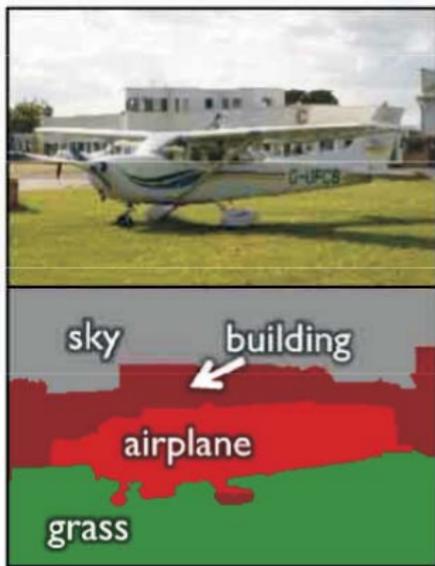
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



Пример задачи семантической сегментации

Анатомическая разметка

Разрезы графов

Ветров

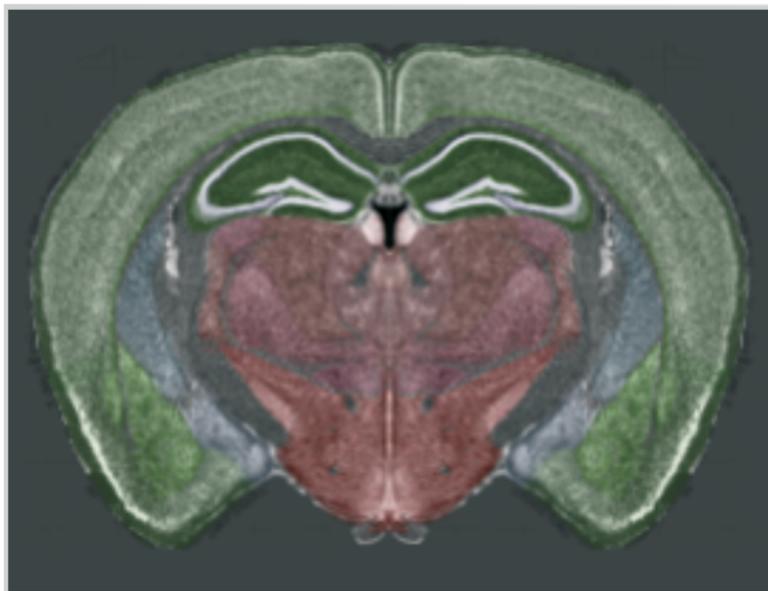
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



Пример задачи автоматического выделения анатомических зон головного мозга мыши

Итерационная схема

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

$$E(T|X) = \sum_{(i,j) \in E} E_{ij}(t_i, t_j) + \sum_i E_i(x_i, t_i) \rightarrow \min_T, \quad t_i \in \{0, 1, \dots, K-1\}$$

- Задача оптимизации энергии по K -значным скрытым переменным ($K > 2$) является NP-трудной
- Тем не менее, в ряде случаев можно построить итерационную процедуру, сходящуюся к близкому к глобальному оптимуму ответу
- Наибольшее распространение получил алгоритм т.н. α -расширения

Итерационная схема

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- Начинаем с произвольного начального приближения
- В цикле для каждой метки $\alpha \in \{0, \dots, K - 1\}$ заменяем часть других меток на данную, так чтобы минимизировать энергию (выполняем α -расширение)
- Если хотя бы для одной метки энергию удалось уменьшить, то переходим в предыдущему шагу, иначе выход

Для сходимости такого алгоритма необходимо, чтобы каждое парное слагаемое было метрикой в пространстве $\{0, \dots, K - 1\}$, т.е. удовлетворяло следующим условиям $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \{0, \dots, K - 1\}$

- $E_{ij}(\alpha, \beta) = E_{ij}(\beta, \alpha)$ (симметричность)
- $E_{ij}(\alpha, \beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$ (аксиома тождества)
- $E_{ij}(\alpha, \gamma) \leq E_{ij}(\alpha, \beta) + E_{ij}(\beta, \gamma)$ (неравенство треугольника)

α -расширение

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

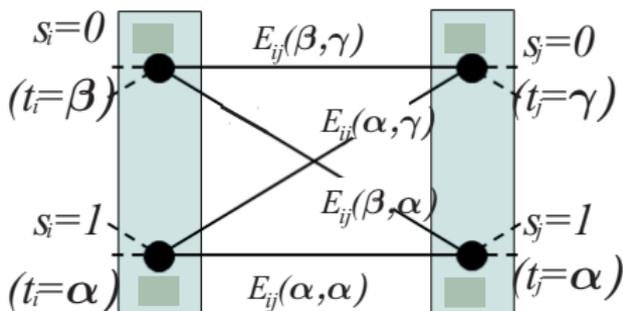
- В ходе альфа-расширения часть других меток принимает значение α , стремясь минимизировать энергию
- Введем вспомогательную марковскую решетку с бинарными переменными s_j , в которой значение 0 будет соответствовать тому, что исходные скрытые переменные t_j не изменились, а значение 1 будет означать, что исходные переменные приняли значение α

$$\forall j : t_j^{old} = \alpha \Rightarrow s_j \equiv 0$$

$$\forall j : t_j^{old} \neq \alpha \Rightarrow \begin{cases} s_j = 0 \Rightarrow t_j^{new} = t_j^{old} \\ s_j = 1 \Rightarrow t_j^{new} = \alpha \end{cases}$$

- Теперь относительно новых переменных можно построить минимальный разрез графа, минимизирующий энергию по всевозможным α -расширениям

α -расширение



- Рассмотрим некоторую пару скрытых переменных (t_i, t_j) , соединенную ребром
- Предположим, что старые значения переменных равнялись β и γ соответственно
- Для корректной репараметризации необходимо выполнение неравенства треугольника

$$E_{ij}(\beta, \gamma) \leq E_{ij}(\alpha, \gamma) + E_{ij}(\beta, \alpha)$$

- Теперь относительно новых переменных можно построить минимальный разрез графа, минимизирующий энергию по всевозможным α -расширениям

α -расширение

Разрезы графов

Ветров

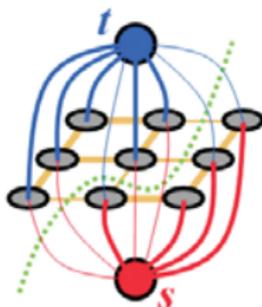
Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение



- Запретим изменять метки класса α

$$c(S, t_i) = E_i(x_i, \alpha), \quad c(T, t_i) = +\infty$$

$$c(t_i, t_j) = E_{ij}(\alpha, \alpha) = 0, \quad \forall (i, j) \in E : t_i = t_j = \alpha$$

- Для остальных вершин ($t_i^{old} \neq \alpha$) определим пропускную способность следующим образом:

$$c(S, t_i) = E_i(x_i, \alpha), \quad c(T, t_i) = E_i(x_i, t_i^{old})$$

$$c(t_i, t_j) = E(\alpha, t_i^{old}), \quad c(t_j, t_i) = E(\alpha, t_j^{old}), \quad \forall (i, j) \in E$$

- Вершинам, попавшим в тот же подграф, что и исток S , будет присвоена метка α , энергия при этом уменьшится

Точность получающегося решения

Разрезы графов

Ветров

Ликбез

Марковские сети

Разрезы графов

Субмодулярные функции

Альфа-расширение

- Алгоритм α -расширения является итерационным, полиномиальным, поэтому не гарантирует достижение глобального оптимума (NP-трудная задача)
- Можно показать, что значение энергии, получившейся в результате альфа-расширения, лежит в интервале

$$E(T^*) \leq E(T) \leq 2kE(T^*),$$

где T^* — оптимальное (наиболее вероятное) значение скрытых переменных, а

$$k = \frac{\max E_{ij}(\beta, \gamma)}{\min_{\beta \neq \gamma} E_{ij}(\beta, \gamma)}$$

степень контрастности парной энергии