Матричная коррекция ограничений несобственных задач линейного программирования в задаче распознавания образов с пересекающимися классами

Ерохин В. И., Красников А. С., Волков В. В.
erohin_v_i@mail.ru, askrasnikov@gmail.com, volkov@bsk.vsu.ru

Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург,
Московский политехнический университет, Москва,
Борисоглебский филиал Воронежского государственного университета, Борисоглебск

ММРО-2019

Москва
26–29 ноября, 2019

Задача распознавания образов

- Рассмотрим простейшую формулировку задачи распознавания образов.
- Исходные данные:
  - описания объектов S в виде векторов значений признаков $S = (v_1(S), v_2(S), \ldots, v_n(S))$;
  - значения класса $\Omega(S)$, которому принадлежит объект.

Определить значение класса $\Omega(S)$ некоторого объекта S по информации о классах объектов $S_1, S_2, \ldots, S_m$ (обучающей выборке).

Линейный классификатор

- Пусть необходимо отделить два классов объектов.
- Будем использовать линейную разделяющую поверхность (гиперплоскость):

$$f(v) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n + 1 = \lambda^T v + 1$$

Найти значение неизвестных коэффициентов $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, являющихся решением системы

$$\begin{cases} f(v(S_1)) > 0, \\ \cdots \\ f(v(S_{m_1})) > 0, \\ f(v(S_{m_1+1})) < 0, \\ \cdots \\ f(v(S_m)) < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Задача матричной коррекции

- Нередко система (1) оказывается несовместной, т.е. обучающие выборки невозможно безошибочно разделить гиперплоскостью.
- Пусть каким-либо образом получено «обобщенное» решение системы и, соответственно, коэффициенты $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n$ линейной функции $f(v)$, определяющей положение разделяющей гиперплоскости.

Задача матричной коррекции

Минимально «исправить» положение объектов в пространстве таким образом, чтобы можно было провести новую разделяющую гиперплоскость, по возможности «близкую» к исходной и строго разделяющую области.

Задача P_r

$$\|\lambda - \bar\lambda\|_1 \to \min, \quad \|E\|^2 \to \min, \qquad (2)$$
$$(V + E)\cdot\lambda = p,$$

где

$$\bar\lambda = \begin{bmatrix} \bar\lambda_1 \\ \vdots \\ \bar\lambda_n \end{bmatrix}, \ \lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}, \ p = \begin{bmatrix} \delta_1 - 1 \\ \vdots \\ \delta_m - 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

$$\delta_i = \begin{cases} \varrho_i, \ \text{если } \varrho_i > 0, \\ \sigma \text{ в противном случае}, \end{cases} \quad \text{для } i = 1, 2, \ldots, m_1,$$
$$\delta_i = \begin{cases} \varrho_i, \ \text{если } \varrho_i < 0, \\ -\sigma \text{ в противном случае}, \end{cases} \quad \text{для } i = m_1 + 1, m_1 + 2, \ldots, m,$$
$$\varrho_i = \bar\lambda_1 v_{i,1} + \bar\lambda_2 v_{i,2} + \ldots + \bar\lambda_n v_{i,n} + 1,$$
$\sigma > 0$ — некоторое число

Переход к коррекции задачи ЛП

Задачу (2) можно переписать следующим образом: из всех возможных матриц $H = \begin{bmatrix} D_1 & -D_2 \end{bmatrix}$ найти матрицу H^* с минимальной евклидовой нормой такую, чтобы задача линейного программирования

$$(A + H^*)x = b, \quad x \geq 0, \quad c^T x \to \max, \tag{4}$$

оказалась собственной.

Здесь $x = \begin{bmatrix} x_{(1)} \\ x_{(2)} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} V & -V \end{bmatrix}$, матрицы E, D_1 и D_2 связаны соотношением $E \cdot \lambda = D_1 \cdot x_{(1)} - D_2 \cdot x_{(2)}$, $\|\lambda - \bar{\lambda}\|_1 = I_{2n}^T \cdot x$, $c = -I_{2n}$, $c, x \in R^N$, $b = p - V \cdot \bar{\lambda} \in R^m$, $A, H \in R^{m \times N}$, $N = 2n + m$.

Построение решения исходной задачи

После решения задачи коррекции (4) параметры исходной задачи разделения классов могут быть пересчитаны из соотношений:

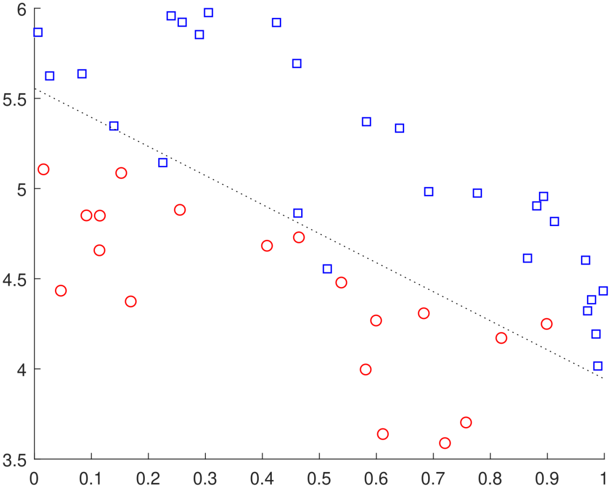
$$\lambda = \bar{\lambda} + (x_{(1)} - x_{(2)})$$

$$E \cdot \lambda = D_1 \cdot x_{(1)} - D_2 \cdot x_{(2)}$$

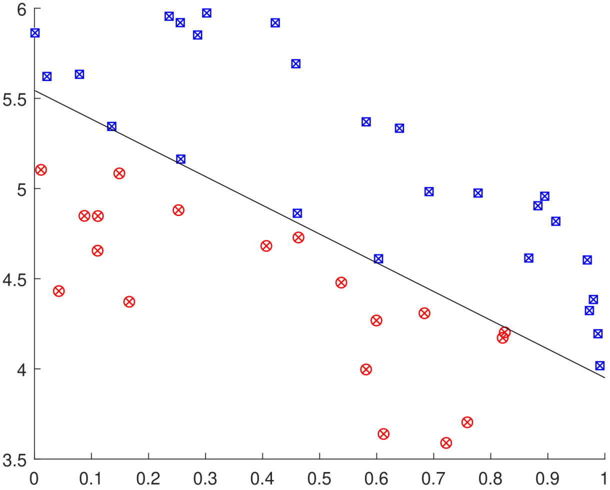
следующим образом

$$E \; = \left(D_1 \cdot x_{(1)} - D_2 \cdot x_{(2)}\right) \cdot \frac{\lambda^\top}{\lambda^\top \lambda}$$

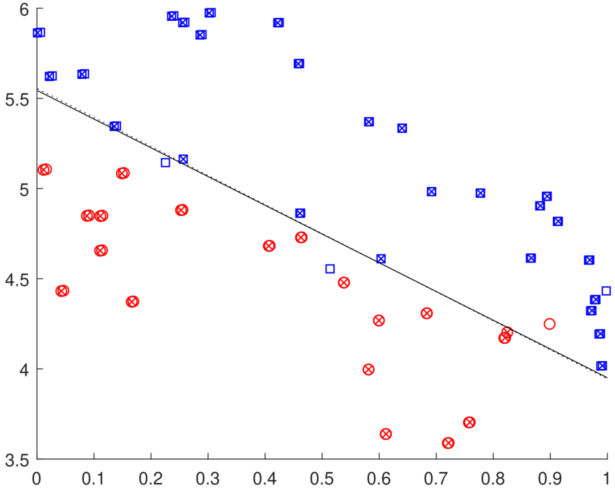
Вычислительный эксперимент



Вычислительный эксперимент



Вычислительный эксперимент



Литература

- Журавлев Ю.И., Рязанов В.В., Сенько О.В. Распознавание. Математические методы. Программная система. Практические применения. — М.: Фазис, 2006.
- Ерохин В.И., Красников А.С. Матричная коррекция двойственной пары несобственных задач линейного программирования с блочной структурой. ЖВМ. 2008. Т. 48. № 1. С. 80–89.
- Ерохин В.И., Красников А.С., Хвостов М.Н. Минимальные по евклидовой норме матричные коррекции задач линейного программирования. Автоматика и телемеханика. 2012. № 2. С. 11–24.
- Erokhin, V.I., Krasnikov, A.S., Volkov, V.V., Khvostov, M.N.: Matrix correction minimal with respect to the euclidean norm of a pair of dual linear programming problems. In: CEUR Workshop Proceedings, Volume 1623, pp. 196–209. (2016)

Литература

- Волков В.В., Ерохин В.И., Красников А.С., Разумов А.В., Хвостов М.Н. Минимальная по евклидовой норме матричная коррекция пары двойственных задач линейного программирования. ЖВМ. 2017. Т. 57. № 11. С. 1788–1803.
- Матросов В.Л., Горелик В.А., Жданов С.А., Муравьева О.В. Коррекция данных в задаче классификации // Мат. методы распознавания образов: Доклады XI Всероссийской конф. (ММРО-11). — М.: ВЦ РАН, 2003. — С. 136–137.
- Муравьева О. В. Исследование параметрической устойчивости решений систем линейных неравенств и построение разделяющей гиперплоскости. Дискретн. анализ и исслед. опер. 2014, том 21, №3, с 53–63.
- Горелик В.А., Маравьева О.В. Методы коррекции несобственных задач и их применение к проблемам оптимизации и классификации. — М: ВЦ РАН, 2012, 150 с.

Матричная коррекция ограничений несобственных задач линейного программирования в задаче распознавания образов с пересекающимися классами

Ерохин В. И., Красников А. С., Волков В. В.
erohin_v_i@mail.ru, askrasnikov@gmail.com, volkov@bsk.vsu.ru

Военно-космическая академия имени А. Ф. Можайского, Санкт-Петербург,
Московский политехнический университет, Москва,
Борисоглебский филиал Воронежского государственного университета,
Борисоглебск

ММРО-2019

Москва
26–29 ноября, 2019