

# **ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ РОБАСТНЫХ СИСТЕМ КВАЗИИНВАРИАНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДАМИ РАСПОЗНАВАНИЯ ОБРАЗОВ**

*Л.Г. Теклина, И.В. Котельников*

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

## ВЕДЕНИЕ

Обязательными требованиями, предъявляемыми к системам управления различного назначения, являются требования обеспечения их устойчивости и способности в той или иной мере компенсировать неконтролируемые возмущения, действующие на объекты управления. Кроме того, при синтезе систем управления необходимо учитывать как неопределенности в задании описания объекта управления, так и возможности вариации параметров регуляторов, т.е. целесообразно рассматривать робастные (асимптотически устойчивые при всех допустимых значениях параметров в описании объекта управления) и нехрупкие, или грубые (асимптотически устойчивые при всех допустимых значениях параметров самих регуляторов) системы управления. Мы в дальнейшем будем говорить о робастных системах управления, подразумевая при этом и робастность по параметрам в описании объекта управления, и робастность по параметрам в описании управляющей функции.

В настоящее время существуют два основных подхода к решению проблемы синтеза систем управления в условиях действия внешних возмущений:

- Постановка задачи синтеза в виде задачи наилучшего (в некотором смысле) приближения к заданным свойствам.

- Построение наблюдателей за поведением системы управления с целью получения знаний о внешних возмущениях.

Главные инструменты – алгебраические методы, аппарат линейных матричных неравенств и полуопределенное программирование, сложность применения которых растет с увеличением числа оцениваемых параметров. Все перечисленные методы имеют теоретическое обоснование, в этом их преимущество, но любое изменение в постановке задачи (изменение математической модели, изменение целевых условий управления) требует нового теоретического обоснования. Еще одна особенность существующих методов – единственность решения, при этом проблема робастности требует проведения дополнительных исследований.

Среди систем управления, действующих в условиях наличия внешних возмущений, большой интерес вызывают системы квазиинвариантного (в иной терминологии, приближенно универсального по свойству инвариантности, или disturbance rejection systems в иностранной литературе) управления. Под квазиинвариантностью понимается требуемая малость ошибки управления в установившемся режиме при любом ограниченном по величине внешнем возмущении. Доказано, что эта задача не является экстремальной и при надлежащем выборе вида управляющей функции существует множество параметров синтезируемого управления, при которых управляемый объект удовлетворяет требованию квазиинвариантности. Для синтеза робастных систем

квазиинвариантного управления предлагается иной, экспериментальный, подход, основанный исключительно на численном исследовании математической модели, описывающей синтезируемую систему управления. Модель может описывать системы любой природы: механическую, электрическую, биологическую, экономическую и др. Новый подход основан на постановке задачи синтеза в качестве проблемы распознавания образов с активным экспериментом и обладает следующими отличительными особенностями:

- переход от классических методов исследования к новой методике, в которой сложные расчеты заменены достоверным математическим экспериментом с последующей обработкой результатов экспериментов методами интеллектуального анализа данных;

- результат - не единственное решение, а целая область значений параметров, удовлетворяющих целевой функции управления;

- результаты решения имеют статистический характер с оценкой степени их статистической достоверности.

Преимущество такого решения – применение методов, работающих в пространствах большой размерности и позволяющих найти нужную область искомых параметров с заданной степенью статистической достоверности.

Рассмотрим особенности постановки и решения задачи синтеза на примере линейных систем управления, но с дальнейшими комментариями по поводу возможностей применения новой методики к синтезу нелинейных систем.

## ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматриваются объекты управления вида

$$\mathbf{A}(p)\mathbf{x}(t) = -\mathbf{B}(p)\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}(p)\xi(t), \quad (1)$$

где  $p = \frac{d}{dt}$ ,  $\mathbf{A}(p)$ ,  $\mathbf{B}(p)$ ,  $\mathbf{F}(p)$  - матричные полиномы размерностей  $n \times n$ ,  $n \times m$  и  $n \times l$  соответственно,  $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $\xi(t) \in \mathbf{R}^l$  - многомерные переменные объекта, управления и внешнего возмущения,  $m \leq n$ ,  $l \leq n$ .

Ставится задача построения управляющей функции вида

$$\mathbf{C}(p)\mathbf{u}(t) = \mathbf{D}(p)\mathbf{x}(t), \quad (2)$$

где  $\mathbf{C}(p)$ ,  $\mathbf{D}(p)$  - матричные полиномы размерностей  $m \times m$  и  $m \times n$ , чтобы ошибка управления в установившемся режиме удовлетворяла условию  $|x_i(t)| < \varepsilon$  при  $t > T$  ( $T$  - длительность переходного процесса) для  $m$  из  $n$  управляемых переменных.

Условие физической реализуемости накладывает на синтезируемую систему следующие требования:

- матрицы  $\mathbf{C}^{-1}(\lambda)$ ,  $\mathbf{A}^{-1}(\lambda)$  и  $(\mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{C}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}(\lambda))^{-1}$  существуют;
- все элементы матриц  $\mathbf{A}^{-1}(\lambda)\mathbf{B}(\lambda)$ ,  $\mathbf{A}^{-1}(\lambda)\mathbf{F}(\lambda)$  и  $(\mathbf{A}(\lambda) + \mathbf{B}(\lambda)\mathbf{C}^{-1}(\lambda)\mathbf{D}(\lambda))^{-1}\mathbf{F}(\lambda)$  - правильные рациональные функции.

Замкнутая система  $(\mathbf{A}(p) + \mathbf{B}(p)\mathbf{C}^{-1}(p)\mathbf{D}(p))\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(p)\xi(t)$  устойчива.

Теоретическому исследованию таких систем посвящены работы Неймарка Ю.И. (случай  $n = 1$ ) и Проскурникова А.В., Якубовича В.А.. Доказано, в частности, что для существования квазиинвариантного управления необходимы:

- устойчивость системы управления;
- размерность  $\mathbf{u}(t)$  должна быть не меньше числа регулируемых переменных.

Опираясь на результаты этих работ, мы ставим задачу параметрического синтеза линейных робастных систем квазиинвариантного управления с построением управляющей функции вида (2) в условиях, когда для параметров объекта

управления – элементов матрицы  $\mathbf{A}(p)$  - заданы лишь их множественные оценки в виде областей допустимых значений. Синтез робастной системы управления сводится к построению функции управления путем отыскания неизвестных коэффициентов полиномов в матрицах  $\mathbf{C}(p)$ ,  $\mathbf{D}(p)$  и к решению задачи идентификации объекта управления путем поиска неизвестных параметров в его описании, так чтобы система управления отвечала требованию квазиинвариантности для неизвестного, но ограниченного по величине внешнего возмущения  $\xi(t)$  при заданных начальных условиях. Решение этой задачи не единственно. Ставится задача отыскания и описания не всех возможных значений неизвестных параметров, а хотя бы некоторого их подмножества достаточно простой конфигурации, но определяемого с заданной высокой степенью статистической достоверности и отвечающего условию достаточности меры робастной устойчивости по определяемым параметрам.

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕТОДАМИ РАСПОЗНАВАНИЯ

Для постановки задачи в виде проблемы распознавания образов в качестве пространства признаков выбираем пространство неизвестных параметров  $\Omega$ , представляющих собой коэффициенты полиномов, образующих матрицы  $\mathbf{A}(p)$ ,  $\mathbf{C}(p)$  и  $\mathbf{D}(p)$ . За распознаваемый образ принимается область  $\Omega^*$  в пространстве признаков. Очевидно,  $\Omega^* \subseteq \Omega_0 \subset \Omega$ , где  $\Omega_0$  - область устойчивости синтезируемой системы. В общем случае область устойчивости – область невыпуклая и несвязная, но мы ставим задачу выделения и описания хотя бы части  $\tilde{\Omega}_0 \subseteq \Omega_0$  этой области, полагая ее связной и выпуклой.

Решение задачи распознавания в пространстве  $\Omega$  - построение в этом пространстве локального решающего правила достаточно простого вида (набор параллелепипедов, сфер, эллипсоидов и т.п.), описывающих искомую область параметров  $\tilde{\Omega}^* \subseteq \Omega^*$ , при условии минимизации числа ошибок второго рода для распознаваемого образа и максимизации меры робастной устойчивости для множества параметров  $\tilde{\Omega}^*$ . С целью ускорения и упрощения процесса решения ищется решение не оптимальное, но удовлетворяющее требуемой надежности

распознавания  $R_0$  и необходимой мере робастной устойчивости по определяемым параметрам  $R(\tilde{\Omega}^*) \geq R_0$ .

Распознавание с активным экспериментом в выбранном пространстве признаков сводится к последовательному решению ряда задач:

- планирование и проведение эксперимента;
- анализ экспериментальных данных;
- формирование обучающих выборок;
- распознавание данных;
- оценивание надежности построенных решающих правил.

Синтез системы управления складывается из последовательного поиска областей  $\tilde{\Omega}_0$  и  $\tilde{\Omega}^*$ , причем если область  $\Omega_0$  определяется системой управления и не зависит от величины и вида внешнего возмущения, то область  $\Omega^*$  зависит и от характера внешнего воздействия. В соответствии с этим решение задачи методами распознавания реализуется в два этапа:

I. Построение области параметров, удовлетворяющей условию устойчивости системы управления.

II. Построение области параметров, удовлетворяющей целевому условию управления.

Каждый этап складывается из решения трех задач:

1. поиск точки с координатами значений параметров, удовлетворяющих целевому условию этапа;
2. формирование обучающей выборки в пространстве параметров на базе найденной точки с применением гипотезы компактности;
3. построение решающего правила, отвечающего заданной степени статистической достоверности.

На первом этапе в задаче 1 поиск  $\omega_0 \in \Omega_0$  ведется путем решения задачи минимизации  $\min_{\omega} \Lambda(\omega)$ , где  $\Lambda(\omega) = \max_i (\operatorname{Re} \lambda_i)$ ,  $\lambda_i$  - корни характеристического полинома замкнутой системы управления (1),(2), причем процесс минимизации заканчивается, как только выполнится неравенство  $\Lambda(\omega) < 0$ . На втором этапе в задаче 1 для выбора  $\omega^* \in \Omega^* \subseteq \tilde{\Omega}_0$  используется решение задачи  $\min_{\omega \in \tilde{\Omega}_0} H(\omega)$ , где

$H(\omega) = \max_{t>T} \|\tilde{\mathbf{x}}(t, \omega)\|$ ,  $\tilde{\mathbf{x}}(t, \omega)$  - решение системы в части управляемых переменных,

отвечающее набору параметров  $\omega$ . Процесс минимизации заканчивается при выполнении неравенства  $H(\omega) < \varepsilon$ ,  $\varepsilon$  - требуемая точность регулирования.

В ходе решения задачи 2 формируется обучающая последовательность путем случайного выбора параметров на основе равномерного распределения из некоторой

области  $G$ , представляющей собой окрестность найденной точки. Требования к области  $G$  состоят в том, что она должна включать как точки со значениями параметров, удовлетворяющих цели этапа, так и точки, не удовлетворяющие поставленной цели. Это сделать не сложно простым расширением области  $G$ .

При построении решающих правил (задача 3) проводится оценка надежности построенных решающих правил на независимой контрольной выборке. В случае несоответствия результата проверки заданной степени статистической достоверности  $P_0$  обучающая выборка пополняется новыми данными, и процесс обучения продолжается.

В зависимости от вида области  $\tilde{\Omega}^*$  возможны два варианта решения:

- для каждого набора параметров объекта управления существует своя область параметров для управляющей функции;
- для любого набора параметров объекта управления область изменения параметров функции управления неизменна.

Для того, чтобы область параметров функции управления была одной и той же для всех параметров объектов управления, т.е. выбор параметров регулятора не зависел от выбора параметров объекта управления, область  $\tilde{\Omega}^*$  должна представлять собой прямую сумму множеств  $\tilde{\Omega}_A^*$  и  $\tilde{\Omega}_{C,D}^*$ ,  $\tilde{\Omega}^* = \tilde{\Omega}_A^* \oplus \tilde{\Omega}_{C,D}^*$ , описывающих,

соответственно, множества параметров объекта управления и функции управления. Простейшим типом множества многомерного пространства, представляющего собой прямую сумму одномерных подмножеств, является параллелепипед. При реализации изложенного метода мы использовали синдромальное решающее правило с покрытием искомого множества объединением параллелепипедов. Каждый синдром – некоторое решение задачи синтеза с выбором соответствующих множеств  $\tilde{\Omega}_A^*$  и  $\tilde{\Omega}_{C,D}^*$ . Выбор единственного решения определяется заданием критерия качества в виде меры робастной устойчивости для множеств параметров  $\tilde{\Omega}_A^*$  и  $\tilde{\Omega}_{C,D}^*$ .

*Замечания о возможностях синтеза нелинейных систем управления.* В изложенной выше методике линейность системы по оцениваемым параметрам существенно используется лишь на этапе построения области устойчивости. В случае нелинейной системы для решения этой проблемы можно применить универсальный подход к исследованию динамических систем методами распознавания образов с построением параметрического портрета системы, изложенный в работе. Этот подход удобно использовать в случае, когда существуют хотя бы грубые оценки области пространства, где может находиться множество  $\Omega_0$ . Для получения таких оценок предлагается использовать  $\tilde{\Omega}_0$  для соответствующей линеаризованной системы.

Поскольку предложенная методика базируется на анализе данных, полученных путем интегрирования системы дифференциальных уравнений, для использования стандартных программ система должна быть разрешена относительно старших производных.

У предложенной методики, как и у любой другой, имеются свои преимущества и свои недостатки. К преимуществам можно отнести возможности решения широкого круга задач (например, синтез робастных грубых (нехрупких) систем с определением области изменения начальных условий и расширением числа требований, предъявляемых к системе) путем увеличения числа неизвестных параметров. Недостатки системы связаны с отсутствием теоретического обоснования и с необходимостью формирования выборок достаточно большого объема для получения статистически достоверных оценок для искомых областей. Вычислительные и временные затраты определяются сложностью интегрирования рассматриваемой системы. Для сокращения временных затрат предлагается использовать возможности параллельных вычислений.

## ПРИМЕРЫ СИНТЕЗА СИСТЕМ КВАЗИИНВАРИАНТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Проиллюстрируем возможности применения методов распознавания для синтеза робастных систем квазиинвариантного управления на двух примерах: управление линейным динамическим объектом с эталонной моделью (пример взят из работ) и гашение колебаний высотных сооружений. При синтезе систем управления рассматривались функции управления минимальной сложности, когда матрица  $C(p)$  диагональная и не зависит от  $p$ . Как уже упоминалось выше, при решении задач распознавания использовались методы, основанные на применении оптимальных тупиковых нечетких тестов.

**Управление объектом с эталонной моделью.** Объект описывается линейным уравнением порядка  $n = 3$ :

$$(p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) y(t) = -u(t) + \xi(t),$$

а эталонная модель задана в виде

$$(p^3 + 3p^2 + 3p + 1) y^*(t) = 1 + \sin t.$$

Цель управления заключается в достижении требуемой величины ошибки управления  $e(t) = |y(t) - y^*(t)| < \delta$ , где  $y(t)$  - регулируемая величина,  $y^*(t)$  - выход эталонной модели,  $\delta$  - заданная величина точности управления при заданных

начальных условиях в фазовом пространстве системы. Путем введения переменной  $y - y^*$  задача слежения сводится к задаче стабилизации.

При наличии возмущения  $\xi(t) = c \sin(\omega t)$  для начальных условий  $y^*(0) = \dot{y}^*(0) = \ddot{y}^*(0) = 0$ ,  $y(0) = \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = 1$  и следующих требованиях, предъявляемых к системе управления:  $\delta = 0.01$ ,  $P_0 = 0.99$  - синтезировано управление вида

$$\mu u(t) = (p^2 + d_1 p + d_2)(y - y^*),$$

где искомые параметры могут принимать любые значения из области

$$\tilde{\Omega}^* = \begin{bmatrix} 1.03092 \leq a_1 \leq 1.90780 \\ 2.25237 \leq a_2 \leq 3.34018 \\ -0.09175 \leq a_3 \leq -0.00021 \\ 3.27319 \leq d_1 \leq 4.41151 \\ 1.09032 \leq d_2 \leq 2.16698 \\ 0.02489 \leq \mu \leq 0.02919 \end{bmatrix}.$$

Эта область – результат последовательного решения двух задач распознавания:

$$S_1 = \begin{bmatrix} 1.02749 \leq a_1 \leq 4.99537 \\ 2.24497 \leq a_2 \leq 7.14240 \\ -0.11142 \leq a_3 \leq 5.91674 \\ 0.83582 \leq d_1 \leq 5.67347 \\ 0.10519 \leq d_2 \leq 4.50503 \\ 0.00034 \leq \mu \leq 1.15355 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 1.03092 \leq a_1 \leq 1.90780 \\ 2.25237 \leq a_2 \leq 3.34018 \\ -0.09175 \leq a_3 \leq -0.00021 \\ 3.27319 \leq d_1 \leq 4.41151 \\ 1.09032 \leq d_2 \leq 2.16698 \\ 0.02489 \leq \mu \leq 0.02919 \end{bmatrix},$$

где  $S_1$  (область устойчивости) и  $S_2$  (область параметров, отвечающих цели управления) - шестимерные синдромы (параллелепипеды), полученные на соответствующих этапах. Синдром  $S_1$  получен на обучающей выборке из 50000 объектов с достоверностью  $P=0.99962$ . Синдром  $S_2$  получен на обучающей выборке из 10000 объектов с достоверностью  $P=0.9981$ . Результаты проверены на независимых контрольных выборках таких же объёмов.

Рассматриваемая задача является задачей слежения. Выход объекта должен с заданной точностью отслеживать выход эталонной модели. Процесс слежения

представлен на рисунках 1-3. На них показаны в зависимости от времени: выход эталонной модели  $y^*(t)$ , выход объекта  $y(t)$ , ошибка управления  $|e(t)|$ , внешнее воздействие  $\xi(t)$  и уровень заданной точности управления  $\delta$ .

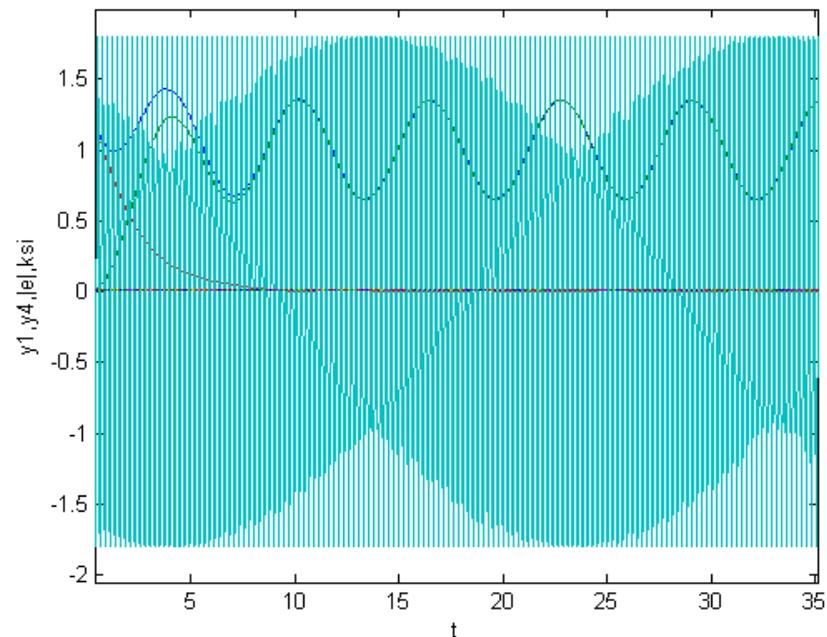


Рис. 1 - Процесс слежения с отображением  $\xi(t)$

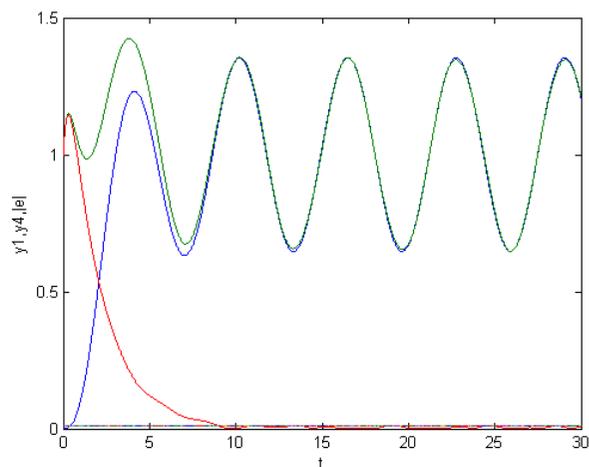


Рис. 2 – Процесс слежения

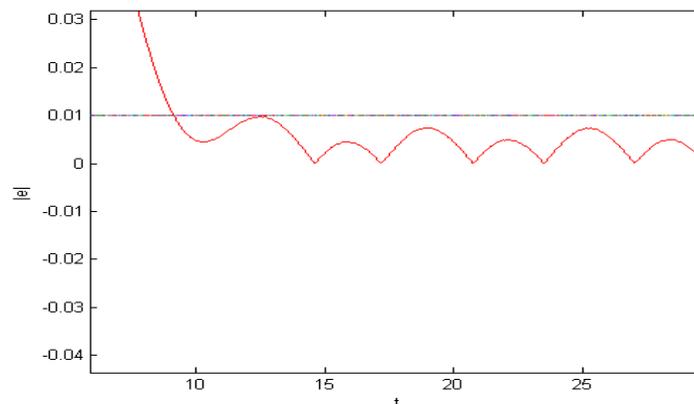


Рис. 3 – Ошибка управления  $|e(t)|$  без отображения  $\xi(t)$

На рис.1 наблюдение процесса слежения затруднено изображением кривой внешнего воздействия  $\xi(t)$ , заполняющего практически весь рисунок. На рис. 2  $\xi(t)$  не показано и можно более четко увидеть процесс слежения. Из точки  $(0,0)$  выходит кривая выхода эталонной модели  $y^*(t)$ , из точки  $(0,1)$  - кривая выхода объекта управления  $y(t)$ , из той же точки монотонно убывает кривая ошибки управления  $|e(t)|$ . На рис. 3 показан фрагмент последней кривой в крупном масштабе и уровень  $\delta = 0.01$ . При  $t > 9.15$  ошибка управления нигде не превосходит уровня  $\delta = 0.01$

Задача решалась при различных внешних воздействиях на объект. Во всех случаях получены положительные результаты.



где  $\mathbf{G}, \mathbf{H}, \mathbf{F}$  - действительные матрицы размерностей  $20 \times 20$ ,  $20 \times 10$  и  $20 \times 1$ . При выборе вида функции управления было принято решение проверить гипотезу об автономности управляемого многосвязного объекта, состоящую в предположении, что управление движением  $i$ -ой материальной точки не зависит от движений всех остальных материальных точек, т.е.  $\mu_i u_i = \dot{x}_i + d_i x_i$ . В этом случае имеем 20-мерное пространство признаков  $\Omega = \{(\mu_1, \dots, \mu_{10}, d_1, \dots, d_{10})\}$ . Построение области устойчивости  $\tilde{\Omega}_0$  в этом пространстве дало неожиданные результаты: очень большое пересечение областей изменения для параметров  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{10}$  и для параметров  $d_1, d_2, \dots, d_{10}$ . Это послужило поводом к проверке гипотезы об еще более простом виде управляющих функций, а именно:  $\mu u_i = \dot{x}_i + d x_i$ , что отвечает двумерному пространству признаков:  $\Omega = \{(\mu, d)\}$ . При таком выборе вида управляющей функции для нулевых начальных условий с достоверностью  $P_0 = 0,99$  была достигнута требуемая точность управления  $\varepsilon \leq 10^{-4}$ .

Задача синтеза робастного квазиинвариантного регулятора решалась в условиях неопределенности описания объекта управления, когда пространство признаков  $\Omega = \{(\mu, d, \alpha, \beta)\}$ . На выборке из 5000 наборов параметров было построено синдромальное решающее правило. Синдром максимального объема

$$S = \begin{bmatrix} -7.3613e-07 \leq \mu \leq -1.0005e-07 \\ 1.5624 \leq d \leq 5998.5 \\ 1.09366 \leq \alpha \leq 999.75 \\ 1.02297 \leq \beta \leq 49.9939 \end{bmatrix}.$$

Для всех точек из этого синдрома точность управления  $\varepsilon \leq 10^{-3}$  при  $|\xi| \leq 1000$  с достоверностью  $P = 0,9998$ . Задача решалась на возмущениях вида  $\xi = A \sin wt$ , при проверке полученных результатов рассматривались возмущения различного вида, в частности:  $\xi_1 = A \operatorname{sign}(\sin wt)$ ,  $\xi_2 = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq 0 \\ A & \text{if } t > 0 \end{cases}$ ,  $\xi_3 = A \sin wt + B |\sin wt|$  и др.

Минимальная ошибка управления  $\varepsilon = 0.000136$  была получена на параметрах  $(-1.00028e-07; 470.984; 638.175; 27.2548)$ , но точка с максимальным радиусом робастной устойчивости для построенного множества  $(-4.1809e-07; 3000; 500.4218; 25.5084)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предлагаемая работа имеет целью показать, что проблема синтеза систем квазиинвариантного управления может плодотворно рассматриваться как задача распознавания, и на этом пути возможно существенное продвижение в ее решении. При этом новый подход к синтезу систем управления не отвергает теорию квазиинвариантного управления, а основывается на ней. Результаты проведенных экспериментов указывают на возможности использования методов интеллектуального анализа данных для изучения свойств и возможностей квазиинвариантного управления, для выбора вида управляющей функции, для синтеза робастных систем и систем управления с заданными свойствами, характеризующими и установившийся режим, и переходный процесс.