

Применение метода распространения ожидания для решения задачи прогнозирования

Чистяков Александр Сергеевич

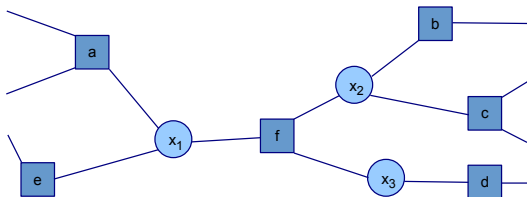
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Кафедра математических методов прогнозирования

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Научный руководитель — к.ф.-м.н., доцент Ветров Д.П.

28 мая 2015

Фактор-граф для описания вероятностных моделей



Совместное распределение:

$$p(X) = \frac{1}{Z} \prod_{j=1}^K \phi_j(X_j)$$

Маргинальное распределение:

$$p(x_i) = \frac{1}{Z} \int_{X^{\setminus i}} \prod_{j=1}^K \phi_j(X_j) dX^{\setminus i}$$

Алгоритм Expectation Propagation (EP)

Аппроксимируем искомые маргинальные распределения с помощью итеративной схемы пересчёта сообщений:

$$m_{f_i \rightarrow x_j}(x_j) = \frac{\text{proj} \left[\int f(X_i) \prod_{x_k \in X_i} m_{x_k \rightarrow f_i}(x_k) dX_i \setminus j \right]}{m_{x_j \rightarrow f_i}(x_j)}$$

$$m_{x_j \rightarrow f_i}(x_j) = \prod_{i: X_i \ni x_j} m_{f_i \rightarrow x_j}(x_j)$$

$$p(x_j) = \prod_{i: X_i \ni x_j} m_{f_i \rightarrow x_j}(x_j)$$

$$\text{proj}[p(x)] = \arg \min_{q \in Q} KL(p \parallel q)$$

Если для всех сообщений $\text{proj}[p(x_j)]$ совпадает с $p(x_j)$, то алгоритм Expectation Propagation вырождается в Loopy Belief Propagation.

Мотивация:

- Автоматическая оценка навыков игрока на основе статистических данных;
- Подбор равных по силе игроков в для повышения интереса участников состязаний.

История развития:

- 1959 г.: Система ELO
- 2006 г.:
 - Модель TrueSkill
 - Модель TrueSkill Through Time (TTT)
- 2007 г.: Модель TTT with Individual Draw Margins (TTT-D)

Предлагаемое усовершенствование:

- Модель FootballSkill

Мастерство игрока:

$$s_i^0 \sim \mathcal{N}(s_i^0 | \mu_0, \gamma_0^2)$$

$$s_i^{t+1} \sim \mathcal{N}(s_i^{t+1} | s_i^t, \gamma^2)$$

Результативность игрока:

$$p_i \sim \mathcal{N}(p_i | s_i, \beta^2)$$

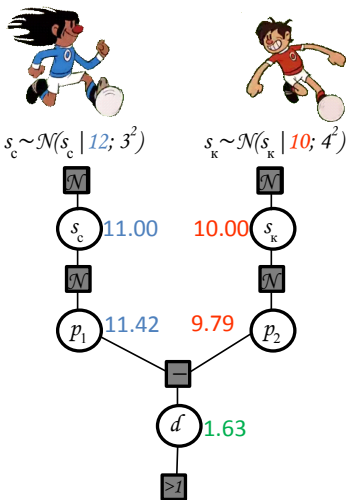
Превосходство игрока a над b :

$$d_{ab} = p_a - p_b$$

Результат игры:

- Игрок a победил игрока b : $\mathbb{I}[d_{ab} > \varepsilon] = 1$
- Ничья между a и b : $\mathbb{I}[|d_{ab}| \leq \varepsilon] = 1$

Модель TrueSkill



Мастерство игрока:

$$s_i^0 \sim \mathcal{N}(s_i^0 | \mu_0, \tau_0^2) \quad \varepsilon_i^0 \sim \mathcal{N}(\varepsilon_i^0 | \nu_0, \varsigma_0^2) \mathbb{I}(\varepsilon_i^0 > 0)$$

$$s_i^{t+1} \sim \mathcal{N}(s_i^{t+1} | s_i^t, \tau^2) \quad \varepsilon_i^{t+1} \sim \mathcal{N}(\varepsilon_i^{t+1} | \varepsilon_i^t, \varsigma^2) \mathbb{I}(\varepsilon_i^{t+1} > 0)$$

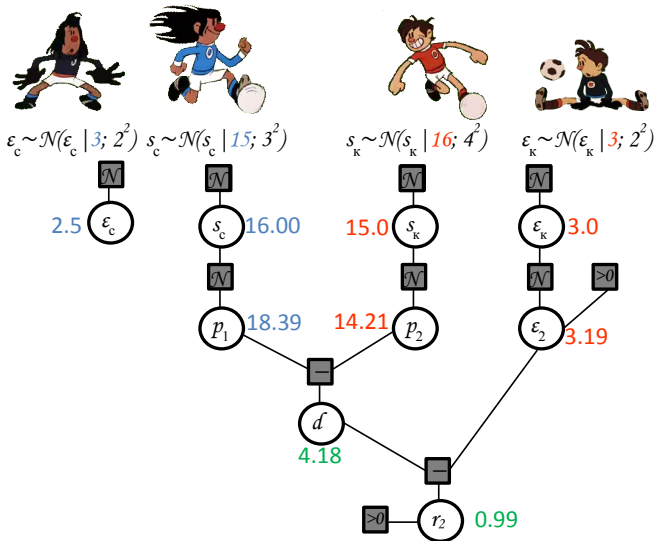
Результативность игрока:

$$p_i \sim \mathcal{N}(p_i | s_i^t, \beta_1^2) \quad \hat{\varepsilon}_i \sim \mathcal{N}(\hat{\varepsilon}_i | \varepsilon_i^t, \beta_2^2)$$

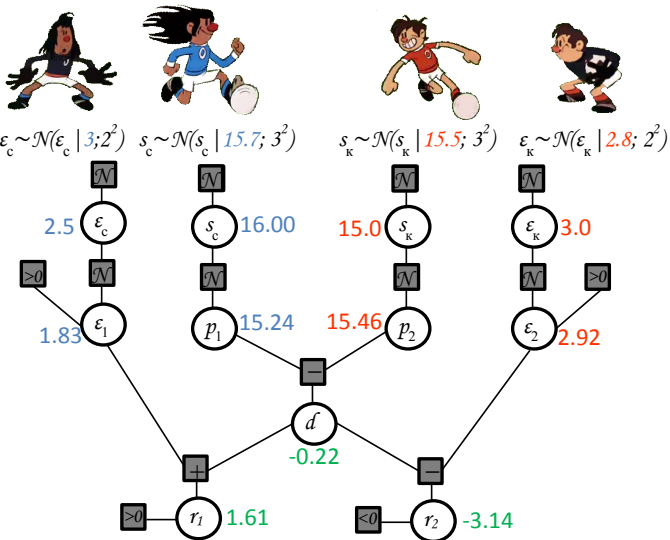
Результат игры:

- Игрок a победил игрока b : $\mathbb{I}[p_a > p_b + \hat{\varepsilon}_b] = 1$
- Игрок b победил игрока a : $\mathbb{I}[p_b^t > p_a^t + \hat{\varepsilon}_a] = 1$
- Ничья между игроками a и b : $\mathbb{I}[-\hat{\varepsilon}_a \leq p_a - p_b \leq \hat{\varepsilon}_b] = 1$

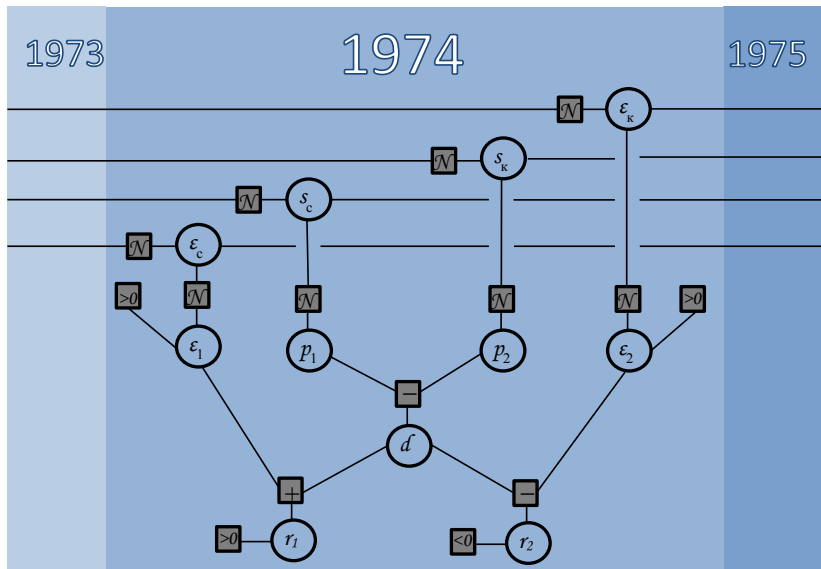
Модель ТТТ-D: Победа "Синих"



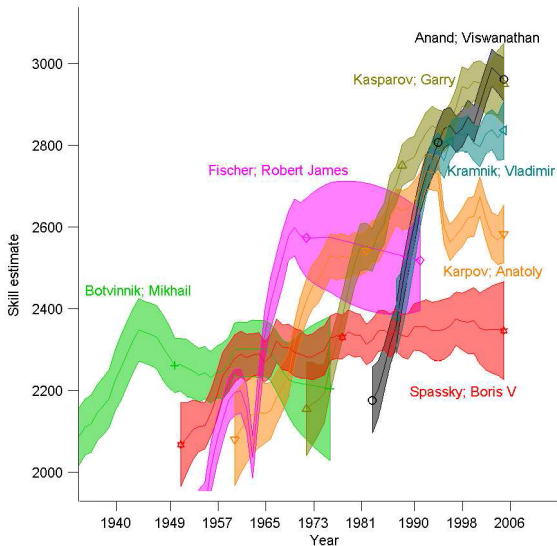
Модель ТТТ-D: Ничья



Модель TTT-D: Учёт изменения навыков во времени



TrueSkill Through Time для ранжирования шахматистов



206 059 игроков, 3 505 366 партий

- Не используется большая часть информации о результатах матча (например, счёт);
- Не позволяют предсказывать детализованную информацию о матчах;
- Плохая практическая интерпретация навыков (s_i могут принимать отрицательные значения);
- Дисперсия игрока, сыгравшего несколько матчей может неограниченно увеличиваться.

Мастерство игрока:

$$a_i^t \sim \mathcal{N}(a_i^t | \mu_0, \tau_0^2) \mathbb{I}(s_i^t > 0) \quad d_i^t \sim \mathcal{N}(d_i^t | \mu_0, \tau_0^2) \mathbb{I}(d_i^t > 0)$$
$$a_i^{t+1} \sim \mathcal{N}(a_i^{t+1} | a_i^t, \tau^2) \quad d_i^{t+1} \sim \mathcal{N}(d_i^{t+1} | d_i^t, \tau^2)$$

Результативность игрока:

$$\hat{a}_i \sim \mathcal{N}(\hat{a}_i | a_i, \beta^2) \quad \hat{d}_i \sim \mathcal{N}(\hat{d}_i | d_i, \beta^2)$$

Забитые голы:

$$g_x = \hat{a}_x - \hat{d}_y \quad g_y = \hat{a}_y - \hat{d}_x$$

Результаты матча:

Обучение:

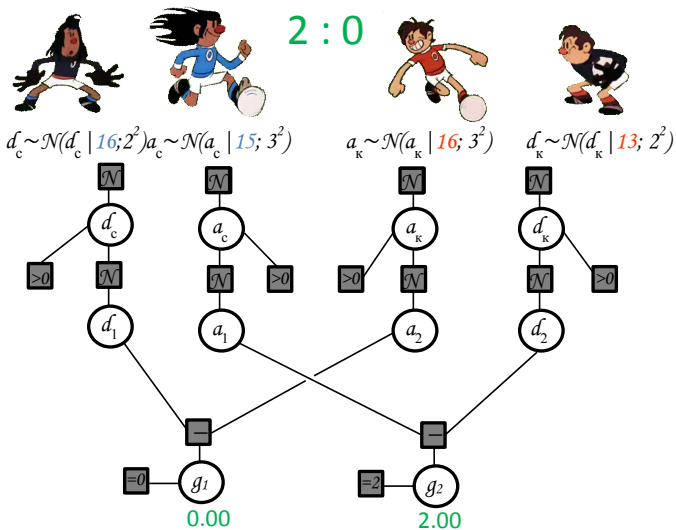
$$Observed(g_x) = score_x \quad Observed(g_y) = score_y$$

Тестирование:

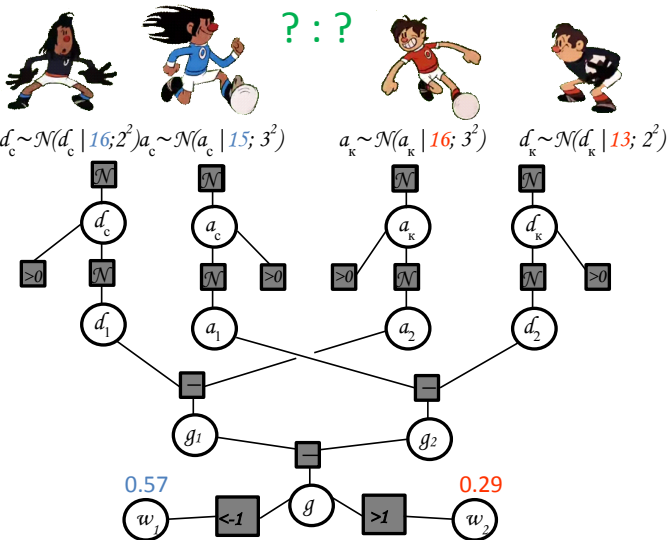
$$p_{x \text{ win}} = \mathbb{I}[g_x > g_y + 1] \quad p_{y \text{ win}} = \mathbb{I}[g_y > g_x + 1]$$

$$p_{draw} = 1 - p_{x \text{ win}} - p_{y \text{ win}}$$

Модель FootballSkill: Обучение



Модель FootballSkill: Тестирование



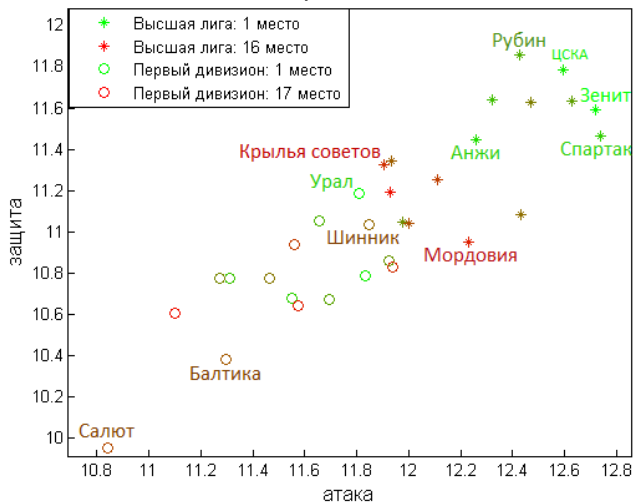
Эксперименты: Анализ исходных данных



1 347 команд, 92 122 матча.

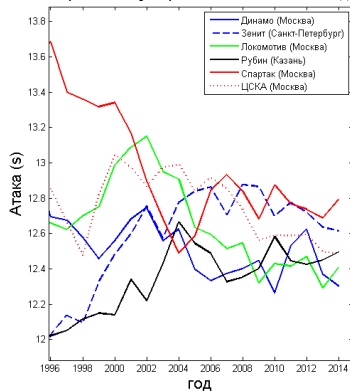
Высший дивизион, первый дивизион, кубок России.

Оценка навыков:

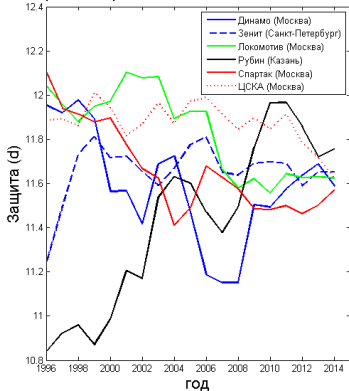


Прогнозирование навыков: FootballSkill

Оценка атакующих способностей команд



Оценка оборонительных способностей команд



Усреднённые по командам средние значения забитых и пропущенных мячей:

	забито	пропущено
дома	1.316	1.228
в гостях	0.814	1.918

Команда, играющая на домашнем поле, демонстрирует лучшую результативность.

Будем использовать этот факт при построении модели матча!

Обучение: случайная половина матчей за период 1936-2013.

Доля верно предсказанных матчей:

	1936-2013	2014
ELO	45.07%	47.27%
TTT-D	46.32%	45.39%
FootballSkill	49.02%	51.53%
FS-HomeAdvantage	56.62%	51.76%

Использование дополнительной информации об исходе матчей позволило существенно повысить точность прогнозирования!

На защиту выносятся:

- Модели FootballSkill и FS-HomeAdvantage для прогнозирования результатов футбольных матчей;
- Алгоритм оценки распределений в построенной модели при помощи метода распространения ожидания;
- Экспериментальное сравнение реализованных моделей с аналогами на реальных данных.