

Задание 3. Метод опорных векторов

Курс: Практикум на ЭВМ, осень 2016

Начало выполнения задания: 1 ноября.

Срок сдачи: **20 ноября, 23:59.**

Среда для выполнения задания: Python 3.4 или Python 2.7

1 Ликбез

Зафиксируем обозначения:

- N — число объектов в обучающей выборке.
- D — размерность признакового пространства.
- $\mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^D$ — вектор признаков объекта n .
- $y_n \in \{-1, 1\}$ — правильный ответ для объекта n .

Прямая задача SVM

$$\min_{\mathbf{w}, \xi \geq 0} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{n=1}^N \xi_n,$$

$$\text{s.t. } y_n(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n + w_0) \geq 1 - \xi_n, \quad n = 1, \dots, N.$$

Прямая задача SVM без ограничений В предыдущей задаче можно избавиться от переменных ξ_n , если учесть, что $\xi_n \geq 0$ и $\xi_n \geq 1 - y_n \mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n$:

$$\min_{\mathbf{w}} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{n=1}^N \max\{0, 1 - y_n(\mathbf{w}^\top \mathbf{x}_n + w_0)\}.$$

Двойственная задача SVM

$$\max_{\mathbf{a}} \sum_{n=1}^N a_n - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N a_n a_m y_n y_m k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)$$

$$\text{s.t. } 0 \leq a_n \leq C, \quad n = 1, \dots, N,$$

$$\sum_{n=1}^N a_n y_n = 0,$$

где $k(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m)$ — ядровая функция, в линейном случае ее значение равно $\mathbf{x}_n^\top \mathbf{x}_m$.

Субградиент Вектор $\mathbf{g} \in \mathbb{R}^n$ является субградиентом выпуклой функции $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, если $\forall \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ выполнено неравенство

$$f(\mathbf{z}) \geq f(\mathbf{x}) + \mathbf{g}^\top (\mathbf{z} - \mathbf{x}).$$

Если функция f дифференцируема в точке \mathbf{x} , ее субградиент в этой точке совпадает с градиентом. *Субдифференциалом* функции f в точке \mathbf{x} называют множество субградиентов в этой точке, обозначают $\partial f(\mathbf{x})$.

Рассмотрим пример вычисления субдифференциала для функции $f(x) = |x|$. При $x < 0$ субградиент единственен: $\partial f(x) = -1$; аналогично при $x > 0$: $\partial f(x) = 1$. При $x = 0$ субдифференциал определяется неравенством $|z| \geq gz$ для любого $z \in \mathbb{R}$, это неравенство выполнено только при $g \in [-1, 1]$, таким образом $\partial f(0) = [-1, 1]$.

Субградиентный спуск — метод аналогичный методу градиентного спуска, в котором вместо градиента используется субградиент.

2 Формулировка задания

Требуется реализовать следующие методы для решения задачи SVM:

1. Метод внутренней точки для решения прямой задачи.
2. Метод внутренней точки для решения двойственной задачи.
3. Метод субградиентного спуска для решения прямой задачи, а также его стохастический вариант. Рассмотреть критерий останова как по значению целевой функции, так и по норме аргумента. Реализовать полностью самостоятельно. Для этого потребуется вывести формулу для субградиента функционала в прямой задаче SVM без ограничений, вывод вставить в отчет.
4. Метод, используемый в библиотеке `liblinear`.
5. Метод, используемый в библиотеке `libsvm`.

Исследовательская часть. Для проведения исследований необходимо генерировать модельные данные, которые не являются линейно разделимыми, для этого удобно использовать многомерные нормальные распределения. Минимальный размер выборки — по 100 объектов в каждом классе.

Требуется провести следующие исследования:

1. Исследовать зависимость времени работы реализованных методов для решения задачи линейного SVM от размерности признакового пространства и числа объектов в обучающей выборке. Исследовать скорость сходимости методов. Сравнить методы по полученным значениям целевой функции.
2. Провести эти исследования для случая SVM с RBF ядром для тех методов, где возможен ядровой переход.
3. Реализовать процедуру поиска оптимального значения параметра C и ширины RBF ядра с помощью кросс-валидации (можно воспользоваться библиотекой `scikit-learn`). Исследовать зависимость ошибки на валидационной выборке от значений этих параметров. Рассмотреть случаи хорошо и трудно разделимых выборок.
4. Сравнить (по скорости сходимости и точности решения) несколько стратегий выбора шага α_t в методе субградиентного спуска: α , $\frac{\alpha}{t}$, $\frac{\alpha}{t^\beta}$, где α , β — некоторые константы, t — номер итерации.
5. Исследовать, как размер подвыборки, по которой считается субградиент, в методе стохастического субградиентного спуска влияет на скорость сходимости метода и на точность решения. В этом и предыдущем пунктах за точное решение можно взять решение, полученное с помощью одного из методов внутренней точки.
6. Для двумерного случая:
 - Провести визуализацию выборки.
 - Для линейного SVM и для SVM с RBF ядром провести визуализацию разделяющей поверхности
 - Отобразить объекты, соответствующие опорным векторам.

Бонусная часть. Провести визуализацию разделяющей поверхности и объектов выборки для числа признаков больше двух и RBF ядра. (+0.5 к итоговой оценке)

3 Требования к оформлению

Для сдачи задания необходимо предоставить:

1. Отчет в формате pdf (оформленный в системе \LaTeX) или IPython notebook с описанием всех проведенных исследований со всеми графиками и выводами.
2. Python модуль `svm.py` со классом `SVM`, в соответствии со спецификациями, приведенными ниже.
3. Если предоставлен отчет в формате pdf, предоставить также IPython notebook с кодом для воспроизведения всех результатов из отчета: таблиц, графиков и т.д.

4 Спецификации

Необходимо предоставить модуль `svm.py`, в котором должен быть реализован класс `SVM`.

Замечание 1. Все описанные ниже функции должны работать для бинарного случая, в этом случае метки классов принимают значения 1 и -1 .

Замечание 2. Все некорректные вызовы методов и обращения к атрибутам должна обрабатываться (т.е. при вызове функций для двойственной задачи при решении прямой должно выбрасываться исключение).

Замечание 3. Для проверки задания используются автоматические тесты, которые чувствительны к неверным прототипам функций/изменённым названиям атрибутов класса. В используемые прототипы можно добавлять аргументы по умолчанию, в класс можно добавлять свои методы и атрибуты.

В классе должны присутствовать следующие атрибуты:

1. Атрибуты, которые задаются при инициализации:

- `C` — параметр регуляризации, `float`
- `method` — метод для решения задачи SVM, должен принимать следующие значения:
 - `'primal'` — метод внутренней точки для решения прямой задачи. Рекомендуется использовать библиотеку `cvxopt`, метод `cvxopt.solvers.qp`
 - `'dual'` — метод внутренней точки для решения двойственной задачи. Рекомендуется использовать библиотеку `cvxopt`, метод `cvxopt.solvers.qp`
 - `'subgradient'` — метод субградиентного спуска для решения прямой задачи
 - `'stoch_subgradient'` — метод стохастического субградиентного спуска для решения прямой задачи
 - `'liblinear'` — метод, используемый в библиотеке `liblinear`. Рекомендуется использовать биндинги из библиотеки `scikit-learn`, класс `sklearn.svm.LinearSVC`
 - `'libsvm'` — метод, используемый в библиотеке `libsvm`. Рекомендуется использовать биндинги из библиотеки `scikit-learn`, класс `sklearn.svm.SVC`
- `tol` — требуемая точность для метода обучения
- `max_iter` — максимальное количество итераций в методе обучения
- `verbose` — в случае `True`, требуется выводить при обучении отладочную информацию на экран (номер итерации, значение целевой функции)

2. Атрибуты, которые появляются после обучения:

- `status` — 0 или 1, 0 — если после обучения метод вышел по критерию останова, 1 — если по числу итераций
- `objective_curve` — список значений целевой функции по итерациям метода
- `time` — время обучения метода
- `w` — вектор весов SVM для прямой задачи, переменная типа `numpy.array`, матрица размера $D \times 1$ (только в случае, когда решается прямая задача)
- `A` — значения двойственных переменных, матрица размера $N \times 1$ (только в случае, когда решается двойственная задача)

3. Атрибуты, которые необходимо задать, если задача решается с помощью субградиентных методов:

- `stop_criterion` — критерий останова, может принимать следующие значения:
 - `'objective'` — остановка по значению целевой функции в случае субградиентного метода, для стохастического субградиентного метода необходимо использовать экспоненциальное скользящее среднее
 - `'argument'` — остановка по норме аргумента
- `lamb` — параметр забывания (только если используется стохастический градиентный спуск и критерий останова `'objective'`)

4. Атрибуты, которые необходимо задать, если решается двойственная задача:

- `kernel` — ядро, использующееся для решения. Может принимать следующие значения:
 - `'linear'` — линейный случай
 - `'rbf'` — RBF ядро
- `gamma` — ширина RBF ядра (если `kernel = 'rbf'`), `float`

Замечание 4. Здесь и далее полагается, что:

X — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times D$, признаковые описания объектов из обучающей выборки,

y — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $N \times 1$, правильные ответы на обучающей выборке, В классе должны быть реализованы следующие методы:

1. `compute_primal_objective(self, X, y)` — метод для подсчета целевой функции SVM для прямой задачи
Функция должна возвращать одно число — значение целевой функции.
2. `compute_dual_objective(self, X, y)` — метод для подсчета целевой функции SVM для двойственной задачи

Функция должна возвращать одно число — значение целевой функции.

Замечание. Учтите, что для разных ядер — разные целевые функции.

3. `fit(self, X, y)` — функция для обучения svm с помощью метода, заданного параметром `method`.

Функция должна заполнять следующие атрибуты класса:

- `w` в случае прямой задачи и `A` случае двойственной задачи
- `status, objective_curve, time`

4. `predict(self, X_test, return_classes=False)` — метод для предсказаний ответов по новым данным.

Описание параметров:

- `X_test` — переменная типа `numpy.array`, матрица размера $M \times D$, признаковые описания объектов из тестовой выборки
- `return_classes` — если значение равно `True`, необходимо вернуть метки классов, иначе вернуть оценки, выдаваемые классификатором

Функция должна возвращать `numpy array` размера $M \times 1$, ответы алгоритма на тестовой выборке.

5. `compute_support_vectors(self, X, y)` — метод для определения опорных векторов.

Метод работает только в случае двойственной задачи. Метод должен возвращать `numpy.array`, матрицу размера $K \times D$, где K — число найденных опорных векторов.

6. `compute_w(self, X, y)` — метод для получения прямых переменных `w` по двойственным `A`.

Работает только в случае двойственной задачи без ядер. Метод должен заполнять параметр `w` класса.

7. `visualize(X, y, show_vectors=False)` — функция визуализации для двумерного случая, соответствующая требованиям пункта 6 исследовательской части задания

Описание параметров:

- `show_vectors` — если значение равно `True`, необходимо отразить объекты, соответствующие опорным векторам